

Noțiuni de bază în fizica particulelor elementare

Sistemul natural de unități

- Sistemul de unități internaționale (SI) - trei etaloane de măsură

[lungime]SI = 1 m (*metru*)

[timp]SI = 1 s (*secundă*)

[masă sau energie]SI = 1 kg (*kilogram*) sau 1 J (*joule*)

Metru este lungimea drumului parcurs de lumină în vid în timp de **1/299 792 458** dintr-o secundă.

Kilogramul este definit prin fixarea valorii constantei lui Planck **h** la valoarea exactă de $6.62607015 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ ($\text{J} = \text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}$), date fiind definițiile metru și a secunde.

$$\text{Kg} = \frac{h}{6.62607015 \times 10^{-34}} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

Secunda este durată a **9 192 631 770** perioade ale radiației care corespunde tranziției între două niveluri de energie hiperfine ale stării fundamentale a atomului de Cesium 133 la temperatura de 0 K.

puțin practice la scară subatomică!!!
(proprietățile relativiste și cuantice nu pot fi neglijate)

- constante fundamentale - viteza luminii în vid, **c** și cuanta momentului cinetic **$\hbar$**

- În sistemul internațional

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\hbar = 1.054 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} = 6.58 \cdot 10^{-22} \text{ MeV}\cdot\text{s}, \text{ unde } 1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV} \quad 1 \text{ eV (electron-volt)} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

- Pentru sisteme cuantice relativiste

- ✓ viteza ca fracțiune din viteza luminii **c**
- ✓ momentul cinetic (*spin*) în termeni de unități **$\hbar$**

- Sistemul de măsură în care unele **constante universale sunt normate la unitate** (egale numeric cu 1) poartă numele de **sistem de unități naturale (SUN)**

$$[viteza]_{\text{SUN}} = 1 \, c$$

$$[momentul \, cinetic]_{\text{SUN}} = 1 \, \hbar$$

$$[energia] = 1 \, \text{eV cu multiplii } MeV = 10^6 \, \text{eV}, GeV = 10^9 \, \text{eV}$$

$$\hbar = c = 1$$

$$m_{\text{electron}} = 0.511 \, MeV$$

- Pentru metru - se împarte prin **$\hbar \cdot c$** (în SI se exprimă prin **$MeV \cdot s$**)

$$\frac{1m}{c \cdot \hbar} = \frac{1m}{3 \cdot 10^8 \cdot m \cdot s^{-1} \cdot 6.58 \cdot 10^{-22} MeV \cdot s} = 5.1 \cdot 10^{12} MeV^{-1}$$

- Pentru secundă se împarte prin **$\hbar$** (în SI se exprimă prin **$MeV \cdot s$**)

$$\frac{1s}{\hbar} = \frac{1s}{6.58 \cdot 10^{-22} MeV \cdot s} = 1.52 \cdot 10^{21} MeV^{-1}$$

- Unitățile de lungime și de timp pot fi exprimate în sistemul natural de unități prin inversul unităților de energie !!!

$$[lungime]_{\text{SUN}} = [masă \, \text{sau} \, energie]^{-1}$$

$$[timp]_{\text{SUN}} = [masă \, \text{sau} \, energie]^{-1}$$

➤ Regulă generală

- ✓ o cantitate în sistemul SI care are dimensiunile $[E^p L^q T^r]_{SI}$ cu E , L și T reprezentând energia în *Jouli*, lungimea în *metri* și timpul în *secunde*, adică $J^p \cdot m^q \cdot s^r$, în SUN, aceste cantități vor fi exprimate în *energie* la puterea $p-q-r$ adică E^{p-q-r} .

➤ Conversia din SI în SUN

- Dacă în SI, E , L și T reprezintă unități de *Energie*, *Lungime* și *Timp*, avem corespondența:

$$\begin{aligned} [E^p L^q T^r]_{SUN} &= \left[E^p \left(\frac{L \cdot 2\pi}{h \cdot c} \right)^q \left(\frac{T \cdot 2\pi}{h} \right)^r \right]_{SI} = \left[\frac{E^p L^q T^r (2\pi)^{q+r}}{c^q \cdot h^{q+r}} \right]_{SI} = \\ &= [E^p L^q T^r] \cdot (6.24 \cdot 10^9 \text{ MeV} \cdot J^{-1})^p \cdot (5.1 \cdot 10^{12} \text{ MeV}^{-1} \cdot m^{-1})^q \cdot (1.52 \cdot 10^{21} \text{ MeV}^{-1} \cdot s^{-1})^r \end{aligned}$$

$[A]_{SUN}$ și $[A]_{SI}$ sunt mărimile în sistemul natural, respectiv în sistemul internațional

➤ Concret

- ✓ Din SI la SUN se trece simplu prin înlocuirea *Joul*, *metru* și *secundă* prin factorii:

<i>Energie:</i>	$J \rightarrow 6.24 \cdot 10^{12} \text{ MeV}$
<i>Lungime:</i>	$m \rightarrow 5.1 \cdot 10^{12} \text{ MeV}^{-1}$
<i>Timp:</i>	$s \rightarrow 1.52 \cdot 10^{21} \text{ MeV}^{-1}$

- ✓ Invers, din SUN în SI, unitățile asociate se fac prin conversia:

<i>Energie:</i>	$\text{MeV} \rightarrow 1.602 \cdot 10^{-13} \text{ J}$
<i>Lungime:</i>	$\text{MeV}^{-1} \rightarrow 1.96 \cdot 10^{-13} \text{ m}$
<i>Timp:</i>	$\text{MeV}^{-1} \rightarrow 6.58 \cdot 10^{-22} \text{ s}$

- Pentru sisteme cuantice relativiste, utilizarea sistemului de unități SUN are două mari avantaje:

- ✓ două etaloane sunt definite $\hbar=c=1$
- ✓ permite reprezentarea tuturor ecuațiilor

exemplu:
$$\underbrace{E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4}_{SI} \Rightarrow \underbrace{E^2 = p^2 + m^2}_{SUN}$$

Mărimea fizică	SI	SUN ($\hbar=c=1$)
masă	kg	$5.61 \times 10^{26} \text{ GeV}$
lungime	m	$5.07 \times 10^{15} \text{ GeV}$
timp	s	$1.53 \times 10^{24} \text{ GeV}$
sarcina electrică	C	1.89×10^{18}
temperatura	K	$8.62 \times 10^{-14} \text{ GeV}$
forța	N	$1.37 \times 10^{-6} \text{ GeV}^2$
energia	J	$6.93 \times 10^9 \text{ GeV}$
puterea	W	$4.56 \times 10^{-15} \text{ GeV}^2$
potențialul	V	29.7 GeV
câmpul electric	V/m	$5.86 \times 10^{-15} \text{ GeV}^2$
curentul	A	$9.58 \times 10^7 \text{ GeV}^{-1}$
inducția magnetică	T	$1.50 \times 10^{-8} \text{ GeV}^2$
flux magnetic	Wb	$3.86 \times 10^{23} \text{ GeV}^{-2}$
rezistența electrică	Ohm	$3.10 \times 10^{-7} \text{ GeV}^2$
capacitatea electrică	F	$4.49 \times 10^{28} \text{ GeV}^{-1}$
inductanța	H	$6.37 \times 10^{23} \text{ GeV}^{-1}$

➤ **Viteza luminii în vid:**

$$c = 299\,792\,458\text{ ms}^{-1}$$

➤ **Constanta Planck redusă:**

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = \frac{6.626\,068\,72}{2\pi} \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} = 1.054\,571\,596 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

$$\text{Sarcina electrică: } e = 1.602\,176\,487(40) \times 10^{-19} \text{ C}$$

➤ **Permitivitatea vidului**

$$\epsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12} \text{ F/m} = 8.8542 \times 10^{-12} \text{ A}^2 \text{ s}^4 \text{ kg}^{-1} \text{ m}^{-3}$$

➤ **Permeabilitatea vidului**

$$\mu_0 = 12.566\,370\,614 \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$$

$$1 \text{ TeV} = 10^3 \text{ GeV} = 10^6 \text{ MeV} = 10^9 \text{ KeV} = 10^{12} \text{ eV}$$

Cantitatea	Unitatea SI	Unitatea SUN	Factor de conversie
Masa (M) sau Energie (E)	Kg J	GeV	1 GeV = 1.78×10^{-27} kg
			1 kg = 5.61×10^{26} GeV
			1 J = 6.2415×10^9 GeV
			1 GeV = 1.6×10^{-10} J
Lungime (L)	m	GeV ⁻¹	1 GeV ⁻¹ = 0.1975×10^{-15} m
			1 m = 5.07×10^{15} GeV ⁻¹
Timp (T)	s	GeV ⁻¹	1 GeV ⁻¹ = 6.59×10^{-25} s
			1 s = 1.52×10^{24} GeV ⁻¹

Sistemul de Unități Naturale (SUN) : $c=\hbar=1$

Sistemul de Unități naturale Heaviside-Lorentz: $\epsilon_0=\mu_0=c=\hbar=1$

Relativitatea mișcării. Conceptul de vector și de tensor

- ❑ **Relativitatea mișcării** - un anumit corp poate fi în mișcare sau în repaus în același timp, depinzând de sistemul de referință
- obiectele care nu-și modifică structura în timp pot fi reduse la un singur punct reprezentativ (*centrul de masă* - care conține întreaga masă a obiectului).
- pentru descrierea mișcării unui obiect care **nu-și modifică structura în timp** se folosește conceptul de *vector* prin care se poate determina distanța centrului de masă al obiectului față de reper, direcția și sensul în care se deplasează obiectul.
- pentru obiectele care **își schimbă structura în timp**, mișcările lor nu pot fi descrise prin intermediul vectorilor, deoarece nu mai pot fi reduse la un singur punct reprezentativ (centrul de masă nu mai conține informații despre structura acestuia) și ca urmare este nevoie să se introducă o nouă noțiune care să păstreze atât informații despre mișcarea în timp cât și informații despre structura obiectului –*tensor*.
- Tensorii sunt entități geometrice introduse în domeniile matematicii și al fizicii pentru a extinde noțiunile de scalar, vector și matrice (*permite descrierea nu doar a traiectoriei obiectului ci și a structurii obiectului pe parcursul mișcării*)
- **Teoria relativității** - spațiul și timpul există ca un întreg - *continuum spațiu-timp*
- Orice centru de masă care se deplasează în *continuumul spațiu-timp* poate fi descris printr-un tensor, întrucât continuumul spațiu-timp nu este drept ci datorită masei obiectelor se curbează (*tensorul nu descrie doar traiectoria centrului de masă, ci și modul în care continuumul spațiu-timp își modifică structura în prezența acestui centru de masă*)

Formalismul relativist cuadridimensional

- Teoria relativității - similitudinea **timp - spațiu** → formalism cuadridimensional
- Vectorul de poziție spațială – timp, **x** este reprezentat prin componentele contravariante **x^μ** (indicele superior)

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \mathbf{x}) = (t, \mathbf{x})$$

- Într-un spațiu vectorial cu **D** dimensiuni este posibil de a adăuga **D** vectori în baza **e_μ** , astfel că un vector **A** cu componentele **A^μ** (contravariante) poate fi scris în 4 dimensiuni astfel:

$$\mathbf{A} = \sum_{\mu=0}^3 A^\mu \cdot e_\mu = A^\mu \cdot e_\mu$$

(formalismul Einstein în care se repetă indicele covariant – contravariant)

- Produsul scalar a doi vectori **A** și **B**

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^\mu e_\mu B^\nu e_\nu = A^\mu B^\nu g_{\mu\nu}$$

$$g_{\mu\nu} = e_\mu \cdot e_\nu - \text{tensor matricial sau metrică}$$

- Se poate alege o bază unde vectorii sunt ortogonali: $g_{\mu\nu} = 0$ dacă $\mu \neq \nu$

ca urmare

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^\mu \cdot B^\nu \cdot e_\mu^2$$

- Pentru cazul **cuadridimensional spațiu – timp**, în spațiul Minkovski (*spațiu în patru dimensiuni*), lungimea cuadridimensională a unui **vector de poziție spațiu – timp** este realizat pe un interval

$$x^2 = x^\mu \cdot x^\mu \cdot e_\mu^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

- ✓ Astfel că, norma vectorilor de bază va fi:

$$e_\mu^2 = \begin{cases} 1, & \mu = 0 \\ -1, & \mu = 1, 2, 3 \end{cases}$$

- ✓ iar tensorul metric

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Componentele covariante (*indice inferior*) sunt proiecțiile ortogonale ale vectorului **A** pe vectorii de bază **e_μ**

$$\text{Exemplu: } \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{A} \equiv A_\mu$$

Sau (se notează indicele inferior)

$$A_\mu \equiv e_\mu \cdot A = e_\mu \cdot A^\nu \cdot e_\nu = g_{\mu\nu} \cdot A^\nu$$

tensorul metric **g_{μν}** și inversul său **g^{μν}** coincid

$$g_{\mu\nu} = (g^{\mu\nu})^{-1} = g^{\mu\nu}$$

✓ Prin urmare $g^{\mu\nu} \cdot g_{\nu\lambda} = \delta_\lambda^\mu$

✓ De unde rezultă $A^\mu = g^{\mu\nu} \cdot A_\nu$

deci $g^{\mu\nu} \cdot g_{\mu\nu} = 4$

Cuadrivectorul de poziție

➤ Componentele contravariante:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \mathbf{x})$$

➤ Componentele covariante

$$x_\nu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = g_{\mu\nu} x^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3)$$

Prin urmare

$$\begin{aligned} x^\mu &= (x^0, \mathbf{x}) \\ x_\mu &= (x^0, -\mathbf{x}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial^\mu &= \frac{\partial}{x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \vec{\nabla} \right) \\ \partial_\mu &= \frac{\partial}{x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\vec{\nabla} \right) \end{aligned} \quad \nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \frac{\partial}{\partial x_3} \right\}$$

Obs.

➤ În general mărimile de forma $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^\mu b_\mu$ sunt invariante Lorentz dacă $\mathbf{a}$ și $\mathbf{b}$ sunt vectori Lorentz (produsul scalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ nu este afectat de transformarea Lorentz și deci are aceeași valoare în toate sistemele de referință inerțiale)

Cuadrivectorul energie – impuls

$$p^\mu = (E, p_x, p_y, p_z)$$

$E = \gamma \cdot m_0$ - energia totală

p_i ($i = x, y, z$ sau $1, 2, 3$) - componentele impulsurilor

m_0 - masa de repaus

✓ Energia cinetică

$$K = E - m_0 = (\gamma - 1)m_0$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{factor Lorentz}$$

✓ Cuadrivectorul p^μ este un invariant Lorentz:

(se lucrează în SUN, adică $c = 1$)

$$p^2 = g_{\alpha\beta} \cdot p^\alpha \cdot p^\beta = (p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 = E^2 - |\mathbf{p}|^2 = m_0^2$$

Așadar

$$E^2 - p^2 = m_0^2$$

sau

$$E^2 = p^2 + m_0^2$$

Conservarea energiei și impulsului pentru un sistem de particule

- Cuadrivectorul **energie – impuls total**

$$p^\mu = \sum_n p_n^\mu \quad p_n^\mu \text{ - impulsul cuadridimensional al particulei } n$$

- ✓ conservarea energiei și impulsului $p_{init}^\mu = p_{final}^\mu$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$)

- Pentru $\mu = 1, 2, 3 = \mathbf{i}$ avem conservarea impulsului total:

$$p_{init}^i = p_{final}^i \quad \text{sau} \quad p_{init} = p_{final}$$

- Pentru $\mu = 0$ avem conservarea energiei totale:

$$p_{init}^0 = p_{final}^0 \quad \text{sau} \quad E_{init}^{tot} = E_{final}^{tot}$$

Relații în sistemul centrului de masă

Premize:

- ✓ Conservarea energie–impuls total ($\mathbf{p}^\mu$ se conservă)
- ✓ Mărimea $(E^2 - \mathbf{p}^2)$ este un invariant relativist
(are aceeași mărime în toate sistemele de referință)

✓ într-un sistem de referință S: $(p_{init}^\mu)_S^2 = (p_{final}^\mu)_S^2$

✓ în alt sistem S': $(p_{init}^\mu)_S^2 = (p_{final}^\mu)_S^2 = (p_{final}^\mu)_{S'}^2$ (invariant relativist)

Consecință:

- Într-un proces de interacțiune cantitatea $\mathbf{p}^2 = \mathbf{p}^\mu \mathbf{p}_\mu$ se conservă în orice sistem de referință
- În sistemul centrului de masă (SCM)
 - centrul de masă al sistemului este în repaus, impulsul este nul)

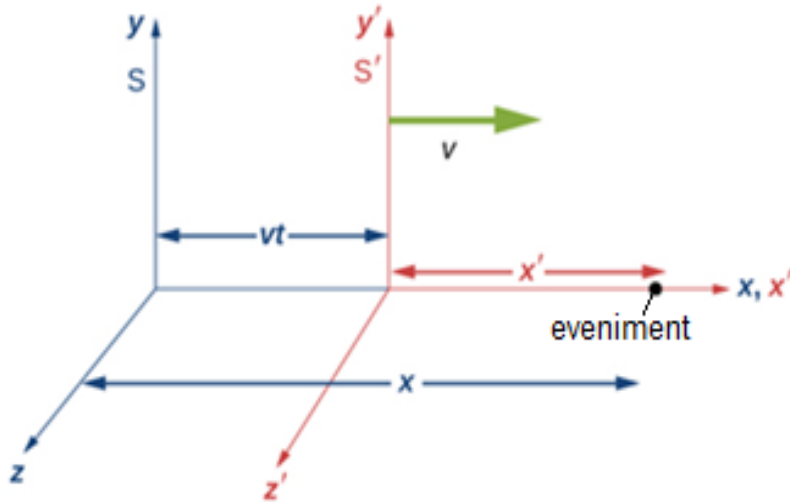
$$(p_{init}^\mu)_S^2 = (p_{final}^\mu)_S^2 = (p_{init}^\mu)_{SCM}^2 = (p_{final}^\mu)_{SCM}^2$$

- Întrucât, în SCM vectorul impuls este nul $|\mathbf{p}| = 0$

$$(p_{init}^\mu)_{SCM}^2 = (p_{init}^0)_{SCM}^2 - (|\mathbf{p}|_{init})_{SCM}^2 = (p_{init}^0)_{SCM}^2 = (E_{init}^{tot})_{SCM}^2 = \left(\sum_n E_n \right)_{SCM}^2$$

Transformări Lorentz

- Conversia între două măsurători diferite, efectuate de doi observatori diferiți, asupra spațiului și timpului, atunci când un observator este în mișcare uniformă și rectilinie în raport cu celălalt.



S și S' - sisteme de referință inerțiale care se mișcă cu viteza relativă v

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

➤ Transformări directe:

$$\begin{aligned}\Delta x &= \gamma(\Delta x' + v\Delta t') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ \Delta t &= \gamma(\Delta t' + v\Delta x'/c^2)\end{aligned}$$

➤ Transformări inverse:

$$\begin{aligned}\Delta x' &= \gamma(\Delta x - v\Delta t) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ \Delta t' &= \gamma(\Delta t - v\Delta x/c^2)\end{aligned}$$

Consecințe:

- Legile fizicii în sistemele de referință inerțiale sunt aceleași
- Viteza luminii este aceeași pentru toți observatorii din sisteme inerțiale
- Spațiul și timpul este văzut diferit pentru diferiți observatori.
- ✓ **contractia Lorentz**: lungimea L (în S) și lungimea L' (în S'): $L = \frac{L'}{\gamma}$
- ✓ **dilatarea timpului**: intervalul de timp Δt (în S) și intervalul de timp $\Delta t'$ (în S'): $\Delta t = \gamma\Delta t'$
- Energia și masa sunt echivalente
- ✓ $E=mc^2$

Transformări relativiste (Lorentz)

- Două sisteme de referință: **S** și **S'**
- Observator din sistemul **S'** care se mișcă pe direcția **z** cu viteza β față de sistemul **S**
- Energia și impulsul în **S** și **S'** sunt legate prin transformările:

$$\begin{aligned}E' &= \gamma(E - \beta p_z) \\ p'_x &= p_x \\ p'_y &= p_y \\ p'_z &= \gamma(p_z - \beta E)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E &= \gamma(E' + \beta p'_z) \\ p_x &= p'_x \\ p_y &= p'_y \\ p_z &= \gamma(p'_z + \beta E')\end{aligned}$$

Unde:

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{v}{c} \\ \gamma &= \sqrt{\frac{1}{1 - \beta^2}}\end{aligned}$$

OBS:

- Relații dintre energie, impuls și masa particulei care se deplasează cu viteza β ($=v/c$):

$$\begin{aligned}E &= \gamma m \\ p &= \gamma \beta m \\ p &= \beta E\end{aligned}$$

- Componenta 4-a cuadrivectorului impuls nu se schimbă în transformările Lorentz.
- Se folosesc notațiile: $\mathbf{p}_T$ (*impulsul transversal* - $\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_y$) și $\mathbf{p}_L$ (*impulsul longitudinal* - $\mathbf{p}_z$).
- Relațiile de transformare devin:

$$\begin{aligned}E' &= \gamma(E - \beta p_L) \\ p'_T &= p_T \\ p'_L &= \gamma(p_L - \beta E)\end{aligned}$$

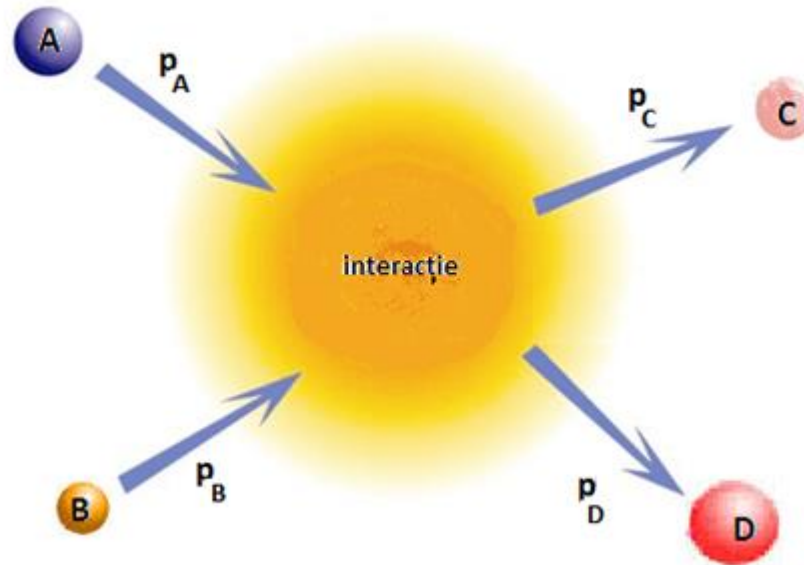
$$\begin{aligned}p_T &= \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \\ p_L &= p_z\end{aligned}$$

Variabilele Mandelstam

➤ Pentru caracterizarea interacțiunilor din fizica energiilor înalte, este convenabil să se definească alte variabile (**s**, **t** și **u**) care *sunt invariante sub transformările Lorentz !*

✓ Să considerăm procesul simplu de împrăștiere : **A+B → C+D**

✓ Cuadrivectorul impuls se conservă: $p_{init}^{\mu} = p_{final}^{\mu} \Rightarrow p_A + p_B = p_C + p_D$



S – pătratul energiei totale în Sistemul Centrului de Masă

$$s = (p_A + p_B)^2 = (p_C + p_D)^2 = (E_A + E_B)^2 - (\vec{p}_A + \vec{p}_B)^2$$

În SCM $\vec{p}_A + \vec{p}_B = \mathbf{0}$ și ca urmare

$$s = (E_A + E_B)^2 = E_{CM}^2$$

S - este totdeauna pozitiv

$\sqrt{s}$ - este energia totală în SCM

t – pătratul transferului de cuadrimpulsului longitudinal în Sistemul Centrului de Masă

$$t = (p_A - p_C)^2 = (p_B - p_D)^2 = (E_A - E_C)^2 - (\vec{p}_A - \vec{p}_C)^2$$

u – pătratul transferului de cuadrimpulsului transversal în Sistemul Centrului de Masă

$$u = (p_A - p_D)^2 = (p_B - p_C)^2$$

➤ Suma variabilelor Mandelstam în SUN este constantă (în SUN $E^2 - p^2 = m^2$)

$$s + t + u = m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2 = \text{const.}$$

Noțiuni de mecanică cuantică relativistă

- În **mecanica clasică**, mișcarea unei particule sau a unui grup de particule poate fi exprimată în termeni de poziție a particulei al un anumit moment
- În **mecanica cuantică**, o stare (*sau o mișcare*) a unei particule este exprimată în termeni de funcții de undă care reprezintă probabilitatea ca o particula să ocupe o anumită poziție la un moment dat. Cu ajutorul operatorilor putem obține în principal valorile observabilelor, cum ar fi impulsul, energia, etc.
- În **mecanica cuantică relativistă**, o stare sau o mișcare este exprimată în spațiu și timp. Ecuațiile de mișcare sunt exprimate cu ajutorul langrangianului

- **Langrangeanul:** - este o funcțională care caracterizează starea unui sistem fizic (în mecanică, funcția lagrangiană este diferența dintre energia cinetică și energia potențială)

$$L=T-V$$

- Analiza acestei funcții permite determinarea *ecuațiilor de mișcare* ale sistemului.
- În mecanica clasică, cantitatea fundamentală este *acțiunea*, **S** care depinde de traiectorie.
- Traiectoria este complet definită de timp, poziție, viteză și punct final:

$$S[t, q(t), \dot{q}(t)]$$

- Minimizarea acțiunii înseamnă că derivatele acesteia vor fi zero de-a lungul traiectoriei
- Derivata acțiunii la timp este numită Lagrangean, și prin urmare

$$S = \int L dt$$

- În teoria câmpului, lagrangeanul ca funcție de coordonatele generalizate este înlocuit cu o *densitate a Lagrangeanului* ($\mathcal{L}$) care este o funcție a câmpurilor, a derivatelor acestora și/sau a coordonatelor spațiale și temporale. Variabila independentă **t** este înlocuită cu un eveniment în spațiu-timp (**t, x, y, z**).
- Astfel că în cazul comportamentului unui sistem fizic într-un câmp, este util să se ia și derivata spațială (*densitatea Lagrangeanului* $\mathcal{L}$)

$$S = \int \mathcal{L} dt d^3x$$

Langrangianul în teoria câmpului

➤ Langrangianul Dirac

$$\mathcal{L}_D = -c\hbar\bar{\psi}\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}\psi - mc^2\bar{\psi}\psi$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

➤ Langrangianul în electrodinamica cuantică

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi}(i\hbar c\gamma^\mu D_\mu - mc^2)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{i}{\hbar}eA_\mu$$

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \vec{\nabla} \right)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad \text{tensorul câmpului electromagnetic}$$

➤ Langrangianul în cromodinamica cuantică

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{(a)} F^{(a)\mu\nu} + i \sum_q \bar{\psi}_q^i \gamma^\mu (D_\mu)_{ij} \psi_q^j - \sum_q m_q \bar{\psi}_q^i \psi_{qi}$$

$$F_{\mu\nu}^{(a)} = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g_s f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

$$(D_\mu)_{ij} = \delta_{ij} \partial_\mu + ig_s \sum_a \frac{\lambda_{i,j}^a}{2} A_\mu^a$$

tensorii câmpului gluonic

Mișcarea nerelativistă pentru particule cu spin 0

- Relația energie-impuls în mecanica clasică

$$\frac{p^2}{2m} + V = E$$

- Transformări în mecanica cuantică

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

$$p \rightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla$$

sau $H \equiv i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ $p \equiv \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \right) = -i\hbar \nabla$

- Mișcarea unei particule caracterizată de funcția de undă Ψ , într-un câmp de forțe este dată de ecuația Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

$|\psi|^2$ – reprezintă probabilitatea de a găsi particula de masă m într-un punct spațial caracterizat de coordonatele (x,y,z)

Mișcarea relativistă pentru particule cu spin 0

Ecuția Klein – Gordon

- Trecerea de la mecanica cuantică la mecanica cuantică relativistă se face practic prin generalizarea ecuației lui Schrödinger pentru un sistem relativist.

✓ Într-un spațiu cuadridimensional ($\hbar = c = 1$) se scrie

$$p^\mu = \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, -i\hbar \nabla \right) = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} = i\partial^\mu$$

- Relația relativistă energie-impuls

$$p_\mu p^\mu = E^2 - |\vec{p}|^2 = m^2$$

- ✓ Substituind mărimile din ecuația Schrödinger relativistă cu reprezentările operatoriale ($\hbar = c = 1$) se obține ecuația Klein – Gordon

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \Psi - (-i\hbar \nabla)^2 \Psi = m^2 \Psi \Leftrightarrow -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + \nabla^2 \Psi = m^2 \Psi$$

sau

$$0 = -\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right)\Psi + m^2\Psi = (-\partial_\mu\partial^\mu - m^2)\Psi = (p^2 - m^2)\Psi$$

$$-\partial_\mu\partial^\mu\Psi - m^2\Psi = 0$$

Ecuția Klein – Gordon

În care

$$p^\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} = i\partial^\mu$$
$$p_\mu = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} = -i\partial_\mu$$

- Ecuția Klein – Gordon este versiunea relativistă a ecuației lui Schrödinger și care este folosită în descrierea particulelor fără spin

Mișcarea relativistă pentru particule cu spin 1/2

Ecuția lui Dirac

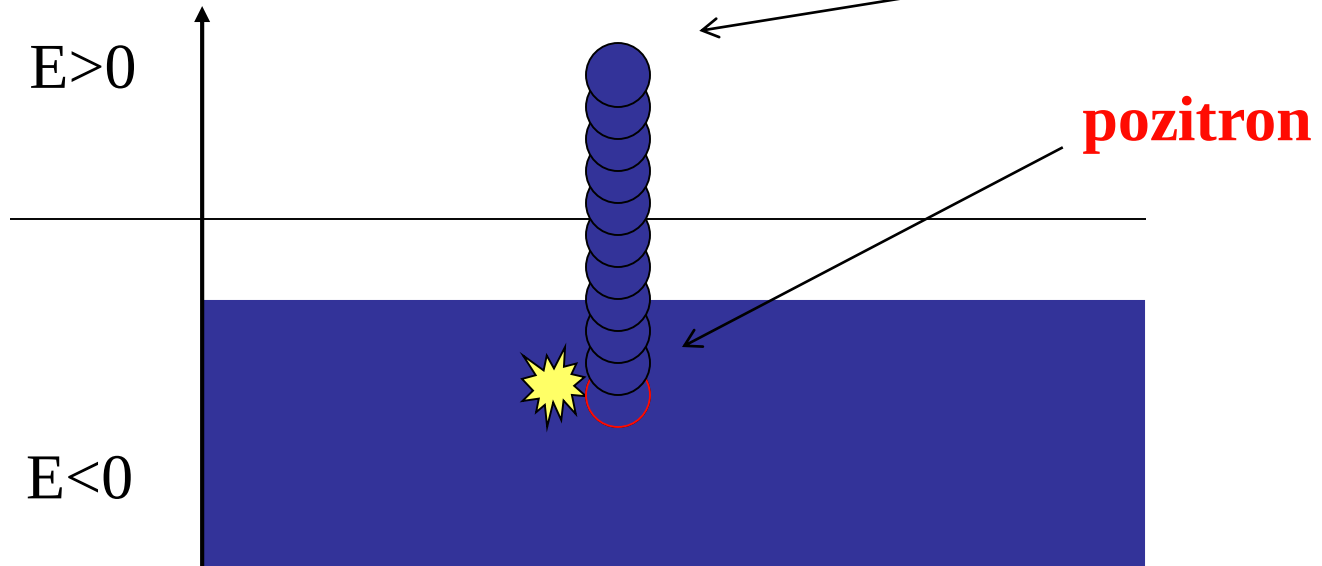
- Ecuția lui Dirac este ecuația undelor a lui Schrödinger în varianta de cuantică relativistă pentru sisteme de particule cu spinul -1/2 (*cum ar fi electronii*).
- Această ecuație impune existența pozitronului.

✓ clasic : $E = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$

✓ relativistic: $E^2 = m^2 + p^2$

2 soluții:

$$E = \pm \sqrt{m^2 + p^2}$$



➤ Această ecuație a fost obținută de Dirac ca urmare a tentativei de liniarizare a ecuației Klein-Gordon. Pentru aceasta a fost introdus un sistem liniar de patru ecuații cuplate. Forma compactă a acestor ecuații:

$$\left(i\gamma_{\mu}\partial^{\mu} - mI \right) \Psi = 0$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix}$$

în care funcția de undă este un bispinor cu 4 componente:

γ^{μ} ($\mu = 0, 1, 2, 3$) sunt matrici 4x4, iar I este o matrice identitate de dimensiune 4x4.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I_2 \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_x \\ -\sigma_x & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_y \\ -\sigma_y & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_z \\ -\sigma_z & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

➤ Ecuația lui Dirac este de fapt un sistem de patru ecuații cuplate

- ✓ Din cele 4 componente (grade de libertate) ale bispinorului Ψ , două servesc la reprezentarea unei **particule** în stările de spin $\pm 1/2$ și celelalte două la reprezentarea unei **antiparticule** din stările de spin $\pm 1/2$

$$i \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \right) \Psi_3 - \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \Psi_4 \right) - m \Psi_1 = 0$$

Ψ^1 – descrie fermioni ($S=1/2$) cu masa **m** și spini paraleli ($\uparrow$)

$$i \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \Psi_4 - \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \Psi_3 \right) - m \Psi_2 = 0$$

Ψ^2 – descrie fermioni ($S=1/2$) cu masa **m** și spini antiparaleli ($\downarrow$)

$$i \left(- \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \right) \Psi_1 - \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \Psi_2 \right) - m \Psi_3 = 0$$

Ψ^3 – descrie antifermioni ($S=1/2$) cu masa **m** și spini paraleli ($\uparrow$)

$$i \left(- \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \Psi_2 - \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \Psi_1 \right) - m \Psi_4 = 0$$

Ψ^4 – descrie antifermioni ($S=1/2$) cu masa **m** și spini paraleli ($\downarrow$)