

Az impulzusnyomatékok összeadása

December 5, 2006

Legyen két kvantummechanikai impulzusnyomaték ($\vec{J}_1$ és $\vec{J}_2$), amely külön-külön és együttesen is jellemzi a kvantummechanikai rendszerünket. Ez lehet például egy elektron orbitális és spin impulzusnyomatéka vagy egy atom esetén két különböző elektron orbitális mozgásából származó impulzusnyomaték. Ha a két impulzusnyomaték kölcsönhat, akkor értelmezhető egy eredő (összeg) impulzusnyomaték, amely szintén a kvantummechanikai definíciónak eleget tevő impulzusnyomaték kell legyen.

Jellemezze a $\vec{J}_1$ impulzusnyomatékot a j_1 kvantumszám

$$\hat{J}_1^2 |j_1 m_1\rangle = j_1(j_1 + 1) |j_1 m_1\rangle \quad (1)$$

$$\hat{J}_{1z} |j_1 m_1\rangle = m_1 |j_1 m_1\rangle, \quad (2)$$

ahol $m_1 \in \{-j_1, -j_1 + 1, \dots, j_1 - 1, j_1\}$. A $\bigcup |j_1 m_1\rangle$ vektorok összessége egy ϵ_{j_1} ($2j_1 + 1$ dimenziós) vektortéren egy standard reprezentációt alkot.

Jellemezze a $\vec{J}_2$ impulzusnyomatékot a j_2 kvantumszám

$$\hat{J}_2^2 |j_2 m_2\rangle = j_2(j_2 + 1) |j_2 m_2\rangle \quad (3)$$

$$\hat{J}_{2z} |j_2 m_2\rangle = m_2 |j_2 m_2\rangle, \quad (4)$$

ahol $m_2 \in \{-j_2, -j_2 + 1, \dots, j_2 - 1, j_2\}$. A $\bigcup |j_2 m_2\rangle$ vektorok összesége egy ϵ_{j_2} ($2j_2 + 1$ dimenziós) vektortéren egy standard reprezentációt alkot.

A j_1 és j_2 értékét lerögzítve értelmezhető az $\epsilon_{j_1 j_2} = \epsilon_{j_1} \otimes \epsilon_{j_2}$ vektortér, amely $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ dimenziós. Ezen a $\epsilon_{j_1 j_2}$ vektortéren egy bázist alkotnak a $|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$ vektorok összessége:

$$\sum_{m_1 m_2} |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle \langle j_1 j_2 m_1 m_2| = \hat{I} \quad (5)$$

Értelmezzük most a

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 \quad (6)$$

impulzusnyomatékot, amely megfelel a két impulzusnyomaték összegének. Fogadjuk el, hogy a kvantummechanika keretében $\vec{J}$ az $\epsilon_{j_1 j_2}$ vektortéren van

értelmezve! Mivel $\vec{J} = (J_x, J_y, J_z)$ szintén egy kvantummechanikai impulzusnyomaték, a komponenseire érvényesek az ismert kommutálási összefüggések:

$$\begin{aligned} [\hat{J}^2, \hat{J}_x] &= [\hat{J}^2, \hat{J}_y] = [\hat{J}^2, \hat{J}_z] = 0 \\ [\hat{J}_x, \hat{J}_y] &= i\hat{J}_z; \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Ezen eredő impulzusnyomaték komponenseit meg megkaphatjuk a két összeadódó impulzusnyomaték komponenseinek a segítségével:

$$\begin{aligned} \hat{J}_z &= \hat{J}_{1z} + \hat{J}_{2z} \\ \hat{J}_x &= \hat{J}_{1x} + \hat{J}_{2x} \\ \hat{J}_y &= \hat{J}_{1y} + \hat{J}_{2y} \end{aligned} \quad (8)$$

Mivel $\vec{J}$ egy kvantummechanikai impulzusnyomaték a $\hat{J}^2$ és $\hat{J}_z$ -nek kell legyen egy közös sajátvektor rendszere a $\epsilon_{j_1 j_2}$ vektortéren. A $|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$ vektorok nem felel meg ennek a célnak, ugyanis $[\hat{J}^2, \hat{J}_{1z}] \neq 0$; $[\hat{J}^2, \hat{J}_{2z}] \neq 0$! A $|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$ vektorok sajátvektorai a $\hat{J}_z$ -nek:

$$\hat{J}_z |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle = (\hat{J}_{1z} + \hat{J}_{2z}) |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle = (m_1 + m_2) |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle \quad (9)$$

Ugyanakkor azonnal belátható (gyakorlatként érdemes bebizonyítani):

$$\begin{aligned} [\hat{J}^2, \hat{J}_1^2] &= 0 \\ [\hat{J}^2, \hat{J}_2^2] &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

ahonnan azonnal következik, hogy a $\hat{J}^2, \hat{J}_1^2, \hat{J}_2^2$ operátoroknak van egy közös sajátvektor rendszere. Mivel azonban

$$\begin{aligned} [\hat{J}^2, \hat{J}_{z1}] &\neq 0 \\ [\hat{J}^2, \hat{J}_{z2}] &\neq 0 \end{aligned} \quad (11)$$

látható, hogy a $\hat{J}^2, \hat{J}_{z1}, \hat{J}_{z2}$ operátoroknak nincs közös sajátvektor rendszere, ezért $|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$ nem sajátvektorai $\hat{J}^2$ -nek!

Jelöljük a $\hat{J}^2, \hat{J}_z, \hat{J}_1^2, \hat{J}_2^2$ közös sajátvektorait az $\epsilon_{j_1 j_2}$ vektortéren $|j_1 j_2 JM\rangle$ -el. Ilyen esetben igazak az alábbi egyenletek:

$$\hat{J}_1^2 |j_1 j_2 JM\rangle = j_1(j_1 + 1) |j_1 j_2 JM\rangle \quad (12)$$

$$\hat{J}_2^2 |j_1 j_2 JM\rangle = j_2(j_2 + 1) |j_1 j_2 JM\rangle \quad (13)$$

$$\hat{J}^2 |j_1 j_2 JM\rangle = J(J + 1) |j_1 j_2 JM\rangle \quad J = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \quad (14)$$

$$\hat{J}_z^2 |j_1 j_2 JM\rangle = M(M + 1) |j_1 j_2 JM\rangle \quad M = -J, \dots, J \quad (15)$$

Világos, hogy a $|j_1 j_2 JM\rangle$ vektorok is bázist alkotnak az $\epsilon_{j_1 j_2}$ vektortéren, és kifejezhetők a $|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$ vektorok segítségével:

$$|j_1 j_2 JM\rangle = f(|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle) \quad (16)$$

Ezen fejezet keretében a $|j_1 j_2 JM\rangle$ vektorok alakját akarjuk meghatározni a $|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$ vektorok függvényében, és keressük a J és M lehetséges értékeit. Mivel $|j_1 j_2 JM\rangle \in \epsilon_{j_1 j_2}$ azonnal felírhatjuk, hogy:

$$|j_1 j_2 JM\rangle = \sum_{m_1, m_2} |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 JM\rangle \quad \text{ahol} \quad (17)$$

a $\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 JM\rangle$ mennyiségek konstansok. Ezeket *Clebsch-Gordan* együtthatóknak nevezzük és rövid jelölésük: $\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | JM\rangle$ (a $|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$ vektorokban a határozatlan fázis tagokat mindig úgy vesszük, hogy a Clebsch-Gordan együtthatók valósak legyenek). A megoldandó feladatunk tehát:

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | JM\rangle = ?$$

$$J = ? \quad M = ?$$

A feladat megoldása érdekében két tételt bizonyítunk:

1. Tétel

A Clebsch-Gordan együtthatók csak akkor zérótól különbözőek, ha: $m_1 + m_2 = M$.

Bizonyítás:

$$\hat{J}_z |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle = (m_1 + m_2) |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle \quad (18)$$

$$\hat{J}_z |j_1 j_2 JM\rangle = M |j_1 j_2 JM\rangle \quad (19)$$

$$M \neq m_1 + m_2 \Rightarrow \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 JM\rangle = \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | JM\rangle = 0, \quad (20)$$

ugyanis ilyen esetben ezek a vektorok a $\hat{J}_z$ hermitikus operátor különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorok, amelyek merőlegesek egymásra.

2. Tétel

A J kvantumszám lehetséges értékei:

$$(j_1 + j_2), (j_1 + j_2 - 1), \dots, |j_1 - j_2| \quad (21)$$

vagyis:

$$|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2 \quad (22)$$

Bizonyítás:

- A $|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$ típusú bázisvektorok száma $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$. A $|j_1 j_2 JM\rangle$ típusú bázisvektorok száma szintén $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ kell legyen. Mindkét típusú bázisvektorok a $\hat{J}_z$ -nek a sajátvektorai az $\epsilon_{j_1 j_2}$ vektortéren.
- Ha k darab $|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$ típusú bázisvektor van, amelyre $m_1 + m_2 = m$ (m rögzített), akkor k darab $|j_1 j_2 JM\rangle$ típusú egymástól független olyan bázisvektor kell legyen, amelyre $M = m$, és ezek a J értékében különböznének egymástól.

- $m_1 + m_2$ maximális értéke $j_1 + j_2$ ($m_1 = j_1, m_2 = j_2$) $\Rightarrow M$ maximális értéke $(j_1 + j_2)$. Egyetlen ilyen állapot van: $J = j_1 + j_2$. Ha J nagyobb lehetne, mint $(j_1 + j_2)$, akkor megjelenne egy nagyobb M is, ami nincs!

- Ha

$$m_1 + m_2 = j_1 + j_2 - 1 = M \Rightarrow \begin{cases} m_1 = j_1 - 1 & m_2 = j_2 \\ m_1 = j_1 & m_2 = j_2 - 1 \end{cases} \quad (23)$$

Két ilyen állapot van, ezért $M = j_1 + j_2 - 1$ -nek megfelel $J = j_1 + j_2$ és $J = j_1 + j_2 - 1$.

- Ha

$$m_1 + m_2 = j_1 + j_2 - 2 = M \Rightarrow \begin{cases} m_1 = j_1 & m_2 = j_2 - 2 \\ m_1 = j_1 - 1 & m_2 = j_2 - 1 \\ m_1 = j_1 - 2 & m_2 = j_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} J = j_1 + j_2 \\ J = j_1 + j_2 - 1 \\ J = j_1 + j_2 - 2 \end{cases} \quad (24)$$

-

- Ha

$$m_1 + m_2 = j_1 + j_2 - 2j_2 = M \quad (j_2 < j_1), \quad (25)$$

ebből lesz a maximális számú állapot, amelyek a

$$\left. \begin{array}{l} J = j_1 + j_2 \\ J = j_1 + j_2 - 1 \\ J = j_1 + j_2 - 2 \\ \vdots \\ J = j_1 - j_2 \end{array} \right\} \text{értékekhez tartoznak.} \quad (26)$$

- Ha

$$m_1 + m_2 = j_1 + j_2 - 2j_2 - 1 = M, \quad (27)$$

ebből már eggyel kevesebb állapot van, amelyek a

$$\left. \begin{array}{l} J = j_1 + j_2 \\ J = j_1 + j_2 - 1 \\ \vdots \\ J = j_1 - j_2 + 1 \end{array} \right\} \text{értékekhez tartoznak.} \quad (28)$$

- ...

Ezt a gondolatmenetet folytatva végül megkapjuk, hogy:

$$|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2 \quad (29)$$

$$M = -J, -J + 1, \dots, J - 1, J \quad (30)$$

Összesen így:

$$\begin{aligned}
& [2(j_1 + j_2) + 1] + [2(j_1 + j_2 - 1) + 1] + \dots + [2(j_1 - j_2) + 1] = \\
& = 2(j_1 + j_2)(2j_2 + 1) - 2(0 + 1 + 2 + \dots + 2j_2) + (2j_2 + 1) = \\
& = 2(j_1 + j_2)(2j_2 + 1) - 2(2j_2 + 1)j_2 + (2j_2 + 1) = \\
& = (2j_2 + 1)(2j_1 + 2j_2 - 2j_2 + 1) = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1) \quad (31)
\end{aligned}$$

számú $|j_1 j_2 JM\rangle$ egymástól független bázisvektor lesz, ami megegyezik a $|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$ típusú bázisvektorok számával!

1 A Clebsch-Gordan együtthatók meghatározása

Mielőtt egy receptet adnánk a Clebsch-Gordan együtthatók meghatározására lássuk ezen együtthatók tulajdonságait. Ezen tulajdonságok segítségével sokkal könnyebb lesz majd a Clebsch-Gordan együtthatókat meghatározni.

1.1 Normálási és ortogonalitási tulajdonságok:

a.

$$\sum_{m_1, m_2} \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | JM \rangle \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | J' M' \rangle = \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \quad (32)$$

b.

$$\sum_{J, M} \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | JM \rangle \langle j_1 j_2 m'_1 m'_2 | JM \rangle = \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2} \quad (33)$$

Bizonyítás:

a. Induljunk ki a következő egyenlőségekből:

$$\langle j_1 j_2 JM | j_1 j_2 J' M' \rangle = \langle j_1 j_2 JM | \hat{I} | j_1 j_2 J' M' \rangle = \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \quad (34)$$

$$\hat{I} = \sum_{m_1, m_2} |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle \langle j_1 j_2 m_1 m_2| \implies$$

$$\sum_{m_1, m_2} \langle j_1 j_2 JM | j_1 j_2 m_1 m_2 \rangle \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 J' M' \rangle = \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \quad (35)$$

A fenti szummában levő skaláris szorzatok a Clebsch-Gordan együtthatók (vagy ezeknek a komplex konjugáltjai). Mivel a Clebsch-Gordan együtthatók valósak: $\langle j_1 j_2 JM | j_1 j_2 m_1 m_2 \rangle = \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 JM \rangle$. Felhasználva a Clebsch-Gordan együtthatók jelölését, következik:

$$\sum_{m_1, m_2} \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | JM \rangle \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | J' M' \rangle = \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \quad (36)$$

b. A bizonyítás az előzőhöz hasonló. A lépések a következők:

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 m'_1 m'_2 \rangle = \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | \hat{I} | j_1 j_2 m'_1 m'_2 \rangle = \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2} \quad (37)$$

$$\hat{I} = \sum_{J,M} |j_1 j_2 JM\rangle \langle j_1 j_2 JM|$$

$$\sum_{J,M} \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 JM \rangle \langle j_1 j_2 JM | j_1 j_2 m_1 m_2 \rangle = \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2} \quad (38)$$

$$(39)$$

Felhasználva a Clebsch-Gordan együtthatók valós voltát

$$\langle j_1 j_2 JM | j_1 j_2 m'_1 m'_2 \rangle = \langle j_1 j_2 m'_1 m'_2 | j_1 j_2 JM \rangle, \quad (40)$$

a (38) egyenlet a bizonyítandó egyenlőséget eredményezi.

$$\sum_{J,M} \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | JM \rangle \langle j_1 j_2 m'_1 m'_2 | JM \rangle = \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2} \quad (41)$$

1.1.1 A Clebsch-Gordan együtthatók meghatározása

$$|j_1 j_2 JM\rangle = \sum_{m_1, m_2} |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | JM \rangle \quad (42)$$

Vegyük az $M = J, J = j_1 + j_2$ esetet. Ebben az esetben csak a $\langle j_1 j_2 j_1 j_2 | JM \rangle$ együttható zérótól különböző, tehát:

$$\begin{aligned} |j_1 j_2 JJ\rangle &= |j_1 j_2 j_1 j_2\rangle \text{ és} \\ \langle j_1 j_2 j_1 j_2 | JJ \rangle &= 1 \end{aligned} \quad (43)$$

Bevezetjük a:

$$\begin{cases} \hat{J}_- = \hat{J}_{1-} + \hat{J}_{2-} \\ \hat{J}_+ = \hat{J}_{1+} + \hat{J}_{2+} \end{cases} \quad (44)$$

operátorokat. Tekintsük a $|j_1 j_2 JM\rangle$ vektort és erre a $\hat{J}_-$ operátor hatását:

$$\hat{J}_- |j_1 j_2 JJ\rangle = (\hat{J}_{1-} + \hat{J}_{2-}) |j_1 j_2 JJ\rangle \quad (45)$$

Az egyenlet kétoldalán felhasználva most a $\hat{J}_-, \hat{J}_{1-}, \hat{J}_{2-}$ operátorok hatását:

$$\begin{aligned} \sqrt{J(J+1) - J(J-1)} |j_1 j_2 J(J-1)\rangle &= \sqrt{j_1(j_1+1) - j_1(j_1-1)} |j_1 j_2 (j_1-1) j_2\rangle + \\ &+ \sqrt{j_2(j_2+1) - j_2(j_2-1)} |j_1 j_2 j_1 (j_2-1)\rangle \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} |j_1 j_2 J(J-1)\rangle &= \frac{\sqrt{j_1(j_1+1) - j_1(j_1-1)}}{\sqrt{J(J+1) - J(J-1)}} |j_1 j_2 (j_1-1) j_2\rangle + \\ &+ \frac{\sqrt{j_2(j_2+1) - j_2(j_2-1)}}{\sqrt{J(J+1) - J(J-1)}} |j_1 j_2 j_1 (j_2-1)\rangle \end{aligned} \quad (47)$$

Innen,

$$\langle j_1 j_2 (j_1 - 1) j_2 | J(J - 1) \rangle = \frac{\sqrt{j_1(j_1 + 1) - j_1(j_1 - 1)}}{\sqrt{J(J + 1) - J(J - 1)}} \quad (48)$$

$$\langle j_1 j_2 j_1 (j_2 - 1) | J(J - 1) \rangle = \frac{\sqrt{j_2(j_2 + 1) - j_2(j_2 - 1)}}{\sqrt{J(J + 1) - J(J - 1)}} \quad (49)$$

vagyis még két Clebsh-Gordan koefficiens meg tudtunk határozni. Hasonlóan:

$$\begin{aligned} \hat{J}_- |j_1 j_2 J(J - 1)\rangle &= \langle j_1 j_2 (j_1 - 1) j_2 | J(J - 1) \rangle (\hat{J}_{1-} + \hat{J}_{2-}) |j_1 j_2 (j_1 - 1) j_2\rangle + \\ &\quad + \langle j_1 j_2 j_1 (j_2 - 1) | J(J - 1) \rangle (\hat{J}_{1-} + \hat{J}_{2-}) |j_1 j_2 j_1 (j_2 - 1)\rangle = \\ &= \langle j_1 j_2 (j_1 - 1) j_2 | J(J - 1) \rangle \sqrt{(j_1 - 1)j_1 - (j_1 - 1)(j_1 - 2)} |j_1 j_2 (j_1 - 2) j_2\rangle + \\ &\quad + \langle j_1 j_2 (j_1 - 1) j_2 | J(J - 1) \rangle \sqrt{j_2(j_2 + 1) - j_2(j_2 - 2)} |j_1 j_2 (j_1 - 2)(j_2 - 2)\rangle + \\ &\quad + \langle j_1 j_2 j_1 (j_2 - 2) | J(J - 1) \rangle \sqrt{j_1(j_1 + 1) - j_1(j_1 - 1)} |j_1 j_2 (j_1 - 1)(j_2 - 1)\rangle + \\ &\quad + \langle j_1 j_2 j_1 (j_2 - 1) | J(J - 1) \rangle \sqrt{j_2(j_2 + 1) - (j_2 - 1)(j_2 - 2)} |j_1 j_2 j_1 (j_2 - 2)\rangle \end{aligned} \quad (50)$$

A fenti egyenletből meghatározhatók a következő Clebsch-Gordan együtthatók:

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle j_1 j_2 (j_1 - 1)(j_2 - 1) | J(J - 2) \rangle \\ \langle j_1 j_2 (j_1 - 2) j_2 | J(J - 2) \rangle \\ \langle j_1 j_2 j_1 (j_2 - 2) | J(J - 2) \rangle \end{array} \right\} \quad (51)$$

A $\hat{J}_- = \hat{J}_{1-} + \hat{J}_{2-}$ operátor sorozatos alkalmazásával meghatározható az összes olyan Clebsch-Gordan együttható, amely a $J = j_1 + j_2$ értékhez tartozik.

Mielőtt tovább mennénk azonnal belátható, hogy a $J = j_1 + j_2$ esetben:

$$\begin{aligned} |j_1 j_2 J - J\rangle &= |j_1 j_2 - j_1 - j_2\rangle \Rightarrow \\ \langle j_1 j_2 - j_1 - j_2 | J - J \rangle &= 1 \end{aligned} \quad (52)$$

Vizsgáljuk most a $J' = j_1 + j_2 - 1$ esetet. Ilyen feltételek mellett: $-(j_1 + j_2 - 1) \leq M' \leq j_1 + j_2 - 1$. Először meghatározzuk megint a

$$\begin{aligned} C_1 &= \langle j_1 j_2 j_1 - 1 j_2 | J' J' \rangle \\ C_2 &= \langle j_1 j_2 j_1 j_2 - 1 | J' J' \rangle \end{aligned} \quad (53)$$

Clebsh-Gordan együtthatókat. Felhasználva, hogy $M = J' = m_1 + m_2$, felírható:

$$\begin{aligned} |j_1 j_2 J' J'\rangle &= \langle j_1 j_2 (j_1 - 1) j_2 | J' J' \rangle |j_1 j_2 (j_1 - 1) j_2\rangle + \\ &\quad + \langle j_1 j_2 j_1 (j_2 - 1) | J' J' \rangle |j_1 j_2 j_1 (j_2 - 1)\rangle = \\ &= C_1 |j_1 j_2 (j_1 - 1) j_2\rangle + C_2 |j_1 j_2 j_1 (j_2 - 1)\rangle \end{aligned} \quad (54)$$

A C_1 és C_2 együtthatók meghatározásához felhasználjuk a (32) normálási és (33) ortogonalitási összefüggéseit a Clebsch-Gordan együtthatóknak. Ezek értelmében:

$$\langle j_1 j_2 j_1 (j_2 - 1) | J(J - 1) \rangle C_2 + \langle j_1 j_2 (j_1 - 1) j_2 | J(J - 1) \rangle C_1 = 0 \quad (55)$$

$$C_2^2 + C_1^2 = 1 \quad (56)$$

Innen meghatározható C_1 és C_2 , majd alkalmazva megint a $\hat{J}_- = \hat{J}_{1-} + \hat{J}_{2-}$ operátort a (54) egyenletre, megkapjuk az $M' = J' - 1, J' - 2, \dots - J'$ értékekhez tartozó nem zéró együtthatókat.

Hasonlóan a $J'' = j_1 + j_2 - 2$ esetben $-(j_1 + j_2 - 2) \leq M'' \leq j_1 + j_2 - 2$. A

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle j_1 j_2 (j_1 - 2) j_2 | J'' J'' \rangle \\ \langle j_1 j_2 (j_1 - 1) (j_2 - 1) | J'' J'' \rangle \\ \langle j_1 j_2 j_1 (j_2 - 2) | J'' J'' \rangle \end{array} \right\} \quad (57)$$

Clebsh-Gordan együtthatók meghatározhatók a normálási illetve ortogonalitási összefüggésekből. ezután az $M'' < J''$ -höz tartozó nem zérós együtthatókat megkapjuk a $\hat{J}_-$ operátor sorozatos alkalmazásával. A bemutatott módszer segítségével lépésről lépésre haladva meghatározható az összes lehetséges Clebsh-Gordan együttható.

A lényeges Clebsh-Gordan együtthatók táblázatok formájában megtalálhatók. Két ilyen táblázatot adunk itt meg, amelyekkel a Clebsh-Gordan együtthatók meghatározhatók a tetszőleges j_1 és $j_2 = 1/2$ vagy a $j_2 = 1$ esetben.

	$m_2 = 1$	$m_2 = 0$	$m_2 = -1$
$J = j_1 + 1$	$\left[\frac{(j_1+M)(j_1+M+1)}{(2j_1+1)(2j_1+2)} \right]^{\frac{1}{2}}$	$\left[\frac{(j_1-M+1)(j_1+M+1)}{(2j_1+1)(j_1+2)} \right]^{\frac{1}{2}}$	$\left[\frac{(j_1-M)(j_1-M+1)}{(2j_1+1)(2j_1+2)} \right]^{\frac{1}{2}}$
$J = j_1$	$-\left[\frac{(j_1+M)(j_1-M+1)}{2j_1(j_1+1)} \right]^{\frac{1}{2}}$	$\left[\frac{M^2}{j_1(j_1+1)} \right]^{\frac{1}{2}}$	$\left[\frac{(j_1-M)(j_1+M+1)}{2j_1(j_1+1)} \right]^{\frac{1}{2}}$
$J = j_1 - 1$	$\left[\frac{(j_1-M)(j_1-M+1)}{2j_1(2j_1+1)} \right]^{\frac{1}{2}}$	$-\left[\frac{(j_1-M)(j_1+M)}{j_1(2j_1+1)} \right]^{\frac{1}{2}}$	$\left[\frac{(j_1+M+1)(j_1+M)}{2j_1(2j_1+1)} \right]^{\frac{1}{2}}$

A Clebsh-Gordan együtthatók tetszőleges j_1 és $j_2 = 1$ esetben.

	$m_2 = \frac{1}{2}$	$m_2 = -\frac{1}{2}$
$J = j_1 + \frac{1}{2}$	$\left[\frac{j_1+M+\frac{1}{2}}{2j_1+1} \right]^{1/2}$	$\left[\frac{j_1-M+\frac{1}{2}}{2j_1+1} \right]^{1/2}$
$J = j_1 - \frac{1}{2}$	$-\left[\frac{j_1-M+\frac{1}{2}}{2j_1+1} \right]^{1/2}$	$\left[\frac{j_1+M+\frac{1}{2}}{2j_1+1} \right]^{1/2}$

A Clebsh-Gordan együtthatók tetszőleges j_1 és $j_2 = 1/2$ esetben.

A fenti táblázatok használata nagyon egyszerű. A nemnulla Clebsh-Gordan együtthatókra igaz, hogy: $m_1 = M - m_2$. Adott J , M , j_1 és m_2 esetén (illetve a rögzített j_2 értékekre) a nemnulla Clebsh-Gordan együtthatók egyszerűen megkaphatók a megfelelő oszlopban és sorban található képletek alkalmazásával.