Noţiuni de bază în fizica particulelor elementare

Sistemul natural de unităţi

- Sistemul de unităţi internaţionale (SI) - trei etaloane de măsură

[*lungime*]SI = 1 *m (metru)*
[*timp*]SI = 1 *s (secundă)*
[*masă sau energie*]SI = 1 *kg* (*kilogram*) sau 1 *J (joule)*

puţin practice la scară subatomică!!!
(proprietăţile relativiste şi cuantice nu pot fi neglijate)

- *constante fundamentale - viteza luminii în vid,* ***c*** *şi cuanta momentului cinetic* $\hbar$

- În sistemul internaţional

$c = 3\cdot10^{8}\ m\cdot s^{-1}$

$\hbar = 1.054\cdot10^{-34}\ J\cdot s = 6.58\cdot10^{-22}\ MeV\cdot s$, unde $1\ MeV = 10^{6}\ eV$ $\quad 1eV$ *(electron-volt)* $= 1.602\cdot10^{-19}\ J$

- Pentru sisteme cuantice relativiste
  - ✓ viteza ca fracţiune din viteza luminii ***c***
  - ✓ momentul cinetic (*spin*) în termeni de unităţi $\hbar$

- Sistemul de măsură în care unele **constante universale sunt normate la unitate** (*egale numeric cu 1*) poartă numele de sistem de unităţi naturale (SUN)

[*viteza*]$_{SUN}$ = 1 *c*
[*momentul cinetic*]$_{SUN}$ = 1$\hbar$
[*energia*] = 1 *eV* cu multiplii *MeV* = 10^6 eV, *GeV* = 10^9 *eV*

$\hbar$=c=1

$m_{electron}$ = 0.511 *MeV*

- Pentru metru - se împarte prin ***$\hbar$·c*** (în SI se exprimă prin ***MeV·s***)

$$\frac{1m}{c\cdot\hbar} = \frac{1m}{3\cdot 10^{8}\cdot m\cdot s^{-1}\cdot 6.58\cdot 10^{-22}\,MeV\cdot s} = 5.1\cdot 10^{12}\,MeV^{-1}$$

- Pentru secundă se împarte prin ***$\hbar$*** (în SI se exprimă prin ***MeV·s***)

$$\frac{1s}{\hbar} = \frac{1s}{6.58\cdot 10^{-22}\,MeV\cdot s} = 1.52\cdot 10^{21}\,MeV^{-1}$$

- Unităţile de lungime şi de timp pot fi exprimate în sistemul natural de unităţi prin inversul unităţilor de energie !!!

[*lungime*]SUN = [*masă sau energie*]$^{-1}$
[*timp*]SUN = [*masă sau energie*]$^{-1}$

- **Regulă generală**
  - o cantitate în sistemul SI care are dimensiunile $[E^pL^qT^r]_{SI}$ cu ***E***, ***L*** şi ***T*** reprezentând energia în *Jouli*, lungimea în *metri* şi timpul în *secunde*, adică $J^p \cdot m^q \cdot s^r$, în SUN, aceste cantităţi vor fi exprimate în ***energie*** la puterea ***p-q-r*** adică E^{p-q-r}.

- Conversia din SI în SUN

- Dacă în SI, ***E***, ***L*** şi ***T*** reprezintă unităţi de ***Energie***, ***Lungime*** şi ***Timp***, avem corespondenţa:

$$\left[E^p L^q T^r\right]_{SUN} = \left[E^p\left(\frac{L\cdot 2\pi}{h\cdot c}\right)^q \left(\frac{T\cdot 2\pi}{h}\right)^r\right]_{SI} = \left[\frac{E^p L^q T^r (2\pi)^{q+r}}{c^q \cdot h^{q+r}}\right]_{SI} =$$
$$= \left[E^p L^q T^r\right]\cdot\left(6.24\cdot 10^9\, MeV\cdot J^{-1}\right)^p \cdot \left(5.1\cdot 10^{12}\, MeV^{-1}\cdot m^{-1}\right)^q \cdot \left(1.52\cdot 10^{21}\, MeV^{-1}\cdot s^{-1}\right)^r$$

$[\boldsymbol{A}]_{SUN}$ *şi* $[\boldsymbol{A}]_{\mathrm{SI}}$ *sunt mărimile în sistemul natural, respectiv în sistemul internaţional*

- Concret
  - ✓ Din SI la SUN se trece simplu prin înlocuirea *Joul*, *metru* şi *secundă* prin factorii:

Energie:	$J \longrightarrow 6.24\cdot10^{12}\ MeV$
Lungime:	$m \longrightarrow 5.1\cdot10^{12}\ MeV^{-1}$
Timp:	$s \longrightarrow 1.52\cdot10^{21}\ MeV^{-1}$

  - ✓ Invers, din SUN în SI, unităţile asociate se fac prin conversia:

Energie:	$MeV \longrightarrow 1.602\cdot10^{-13}\ J$
Lungime:	$MeV^{-1} \longrightarrow 1.96\cdot10^{-13}\ m$
Timp:	$MeV^{-1} \longrightarrow 6.58\cdot10^{-22}\ s$

- Pentru sisteme cuantice relativiste, utilizarea sistemului de unităţi SUN are două mari avantaje:
  - ✓ două etaloane sunt definite **$\hbar$=c=1**
  - ✓ permite reprezentarea tuturor ecuaţiilor

exemplu: $$\underbrace{E^2 = p^2c^2 + m^2c^4}_{SI} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{E^2 = p^2 + m^2}_{SUN}$$

Mărimea fizică	SI	SUN ($\hbar$=c=1)
masă	kg	5.61×10^{26} GeV
lungime	m	5.07×10^{15} GeV
timp	s	1.53×10^{24} GeV
sarcina electrică	C	1.89×10^{18}
temperatura	K	8.62×10^{-14} GeV
forţa	N	1.37×10^{-6} GeV^2
energia	J	6.93×10^{9} GeV
puterea	W	4.56×10^{-15} GeV^2
potenţialul	V	29.7 GeV
câmpul electric	V/m	5.86×10^{-15} GeV^2
curentul	A	9.58×10^{7} GeV^{-1}
inducţia magnetică	T	1.50×10^{-8} GeV^2
flux magnetic	Wb	3.86×10^{23} GeV^{-2}
rezistenţa electrică	Ohm	3.10×10^{-7} GeV^2
capacitatea electrică	F	4.49×10^{28} GeV^{-1}
inductanţa	H	6.37×10^{23} GeV^{-1}

- **Viteza luminii în vid:**

  $c = 299\ 792\ 458\ \mathrm{ms}^{-1}$
- Constanta Planck redusă:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = \frac{6.626\ 068\ 72}{2\pi} \times 10^{-34} \mathrm{J} \cdot s = 1.054\ 571\ 596 \times 10^{-34} \mathrm{J} \cdot s$$

  Sarcina electrică: $e = 1.602\ 176\ 487(40) \times 10^{-19}$ C
- Permitivitatea vidului

  $\varepsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12}$ F/m $= 8.8542 \times 10^{-12}\ \mathrm{A^2\ s^4\ kg^{-1}\ m^{-3}}$
- Permeabilitatea vidului

  $\mu_0 = 12.566\ 370\ 614 \times 10^{-7}\ \mathrm{N/A^2}$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$$

1 TeV = 10^3 GeV = 10^6 MeV = 10^9 KeV = 10^{12} eV

Cantitatea	Unitatea SI	Unitatea SUN	Factor de conversie
Masa (M) sau Energie (E)	Kg J	GeV	$1\ \mathrm{GeV} = 1.78 \times 10^{-27}$ kg $1\ \mathrm{kg} = 5.61 \times 10^{26}$ GeV $1\ \mathrm{J} = 6.2415 \times 10^{9}$ GeV $1\ \mathrm{GeV} = 1.6 \times 10^{-10}$ J
Lungime (L)	m	GeV^{-1}	$1\ \mathrm{GeV}^{-1} = 0.1975 \times 10^{-15}$ m $1\ \mathrm{m} = 5.07 \times 10^{15}\ \mathrm{GeV}^{-1}$
Timp (T)	s	GeV^{-1}	$1\ \mathrm{GeV}^{-1} = 6.59 \times 10^{-25}$ s $1\ \mathrm{s} = 1.52 \times 10^{24}\ \mathrm{GeV}^{-1}$

Sistemul de Unităţi Naturale (SUN) : $c = \hbar = 1$

Sistemul de Unităţi naturale Heaviside-Lorentz: $\varepsilon_0 = \mu_0 = c = \hbar = 1$

Probleme

1. Exprimaţi în SI și SUN următoarele mărimi:
    a. constanta de structură fină
    b. raza Bohr (raza orbitei electronului cu energia cea mai joasă)
    c. lungimea de undă Compton a electronului
    d. raza clasică a electronului (raza Lorentz)

2. Convertiţi următoarele cantităţi în unităţi naturale:
    a. Unitatea de forţă (N)
    b. Impulsul
    c. Puterea (W)
    d. Secţiunea eficace (barn)

3. Determinaţi lungimea de undă de Broglie asociată și lungimea de undă Compton (în SI și SUN) a unui pion ($m_\pi \approx 140$ MeV)

Relativitatea mişcării. Conceptul de vector şi de tensor

- **Relativitatea mişcării -** un anumit corp poate fi în mişcare sau în repaus în acelaşi timp, depinzând de sistemul de referinţă

- obiectele care nu-şi modifică structura în timp pot fi reduse la un singur punct reprezentativ (*centrul de masă* - care conţine întreaga masă a obiectului).

- pentru descrierea mişcării unui obiect care nu-şi modifică structura în timp se foloseşte conceptul de *vector* prin care se poate determina distanţa centrului de masă al obiectului faţă de reper, direcţia şi sensul în care se deplasează obiectul.

- pentru obiectele care îşi schimbă structura în timp, mişcările lor nu pot fi descrise prin intermediul vectorilor, deoarece nu mai pot fi reduse la un singur punct reprezentativ (centrul de masă nu mai conţine informaţii despre structura acestuia) şi ca urmare este nevoie să se introducă o nouă noţiune care să păstreze atât informaţii despre mişcarea în timp cât şi informaţii despre structura obiectului –tensor.
- Tensorii sunt entităţi geometrice introduse în domeniile matematicii şi al fizicii pentru a extinde noţiunile de scalar, vector şi matrice (*permite descrierea nu doar a traiectoriei obiectului ci şi a structurii obiectului pe parcursul mişcării*)

- Teoria relativităţii - spaţiul şi timpul există ca un întreg - *continuum spaţiu-timp*
- Orice centru de masă care se deplasează în *continuumul spaţiu-timp* poate fi descris printr-un tensor, întrucât continuumul spaţiu-timp nu este drept ci datorită masei obiectelor se curbează (*tensorul nu descrie doar traiectoria centrului de masă, ci şi modul în care continuumul spaţiu-timp îşi modifică structura în prezenţa acestui centru de masă*)

Formalismul relativist cuadridimensional

- Teoria relativităţii - similitudinea **timp - spaţiu** → formalism cuadridimensional

- Vectorul de poziţie spaţială – timp, $\boldsymbol{x}$ este reprezentat prin componentele contravariante x^{μ} (indicele superior)

$$x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \mathbf{x}) = (t, \mathbf{x})$$

- Într-un spaţiu vectorial cu **D** dimensiuni este posibil de a adăuga **D** vectori în baza e_{μ}, astfel că un vector **A** cu componentele A^{μ} *(contravariante)* poate fi scris în 4 dimensiuni astfel:

$$\mathbf{A} = \sum_{\mu=0}^{3} A^{\mu} \cdot e_{\mu} = A^{\mu} \cdot e_{\mu}$$

(formalismul Einstein în care se repetă indicele covariant – contravariant)

- Produsul scalar a doi vectori **A şi B**

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A}^{\mu} e_{\mu} B^{\nu} e_{\nu} = A^{\mu} B^{\nu} g_{\mu\nu}$$

$g_{\mu\nu} = e_{\mu} \cdot e_{\nu}$ - *tensor matricial sau metrică*

- Se poate alege o bază unde vectorii sunt ortogonali: **$g_{\mu\nu}$ = 0** dacă ***$\mu \neq \nu$***

ca urmare

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^{\mu} \cdot B^{\nu} \cdot e_{\mu}^{2}}$$

- Pentru cazul **cuadridimensional spaţiu – timp**, în spaţiul Minkovski (*spaţiu în patru dimensiuni*), lungimea cuadridimensională a unui vector de poziţie spaţiu – timp este realizat pe un interval

$$\boxed{x^{2} = x^{\mu} \cdot x^{\mu} \cdot e_{\mu}^{2} = t^{2} - x^{2} - y^{2} - z^{2}}$$

✓ Astfel că, norma vectorilor de bază va fi:

$$e_{\mu}^{2} = \begin{cases} 1, & \mu = 0 \\ -1, & \mu = 1,2,3 \end{cases}$$

✓ iar tensorul metric

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Componentele covariante (*indice inferior*) sunt proiecţiile ortogonale ale vectorului **A** pe vectorii de bază $\mathbf{e}_\mu$

Exemplu: $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\mu}} \cdot \boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{A}_\mu$

Sau (se notează indicele inferior)

$$\boxed{A_\mu \equiv e_\mu \cdot A = e_\mu \cdot A^\nu \cdot e_\nu = g_{\mu\nu} \cdot A^\nu}$$

tensorul metric $\mathbf{g}_{\mu\nu}$ şi inversul său $\mathbf{g}^{\mu\nu}$ coincid

$$g_{\mu\nu} = \left(g_{\mu\nu}\right)^{-1} = g^{\mu\nu}$$

- ✓ Prin urmare $$g^{\mu\nu} \cdot g_{\nu\lambda} = \delta^\mu_\lambda$$
- ✓ De unde rezultă $$A^\mu = g^{\mu\nu} \cdot A_\nu$$

deci $$g^{\mu\nu} \cdot g_{\mu\nu} = 4$$

Cuadrivectorul de poziţie

- Componentele contravariante:

$$x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \mathbf{x})$$

- Componentele covariante

$$x_\nu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = g_{\mu\nu} x^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3)$$

Prin urmare

$$x^{\mu} = (x^0, \mathbf{x})$$
$$x_{\mu} = (x^0, -\mathbf{x})$$

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \vec{\nabla}\right)$$

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\vec{\nabla}\right)$$

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \frac{\partial}{\partial x_3} \right\}$$

Obs.

- În general mărimile de forma $\boldsymbol{a \bullet b = a^{\mu} b_{\mu}}$ sunt invarianţi Lorentz dacă ***a*** şi ***b*** sunt vectori Lorentz (produsul scalar ***a•b*** nu este afectat de transformarea Lorentz şi deci are aceiaşi valoare în toate sistemele de referinţă inerţiale)

Cuadrivectorul energie – impuls

$p^\mu = (E, p_x, p_y, p_z)$

$E = \gamma \cdot m_0$ - *energia totală*

p_i *(i = x, y, z sau 1,2,3)- componentele impulsurilor*

m_0 - *masa de repaus*

- ✓ Energia cinetică $K = E - m_0 = (\gamma - 1)m_0$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$ factor Lorenz

- ✓ Cuadrivectorul p^μ este un invariant Lorentz:

(se lucrează în SUN, adică c = 1)

$$p^2 = g_{\alpha\beta} \cdot p^\alpha \cdot p^\beta = (p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 = E^2 - |\mathbf{p}|^2 = m_0^2$$

Aşadar

$$E^2 - p^2 = m_0^2$$

sau

$$E^2 = p^2 + m_0^2$$

Conservarea energiei şi impulsului pentru un sistem de particule

- Cuadrivectorul energie – impuls total

$$p^{\mu} = \sum_{n} p_n^{\mu}$$

p_n^{μ} - impulsul cuadridimensional al particulei ***n***

✓ conservarea energiei şi impulsului $p_{init}^{\mu} = p_{final}^{\mu}$ (μ = 0, 1, 2, 3)

- Pentru **μ = 1, 2, 3 = i** avem conservarea impulsului total:

$$p_{init}^{i} = p_{final}^{i} \quad \text{sau} \quad p_{init} = p_{final}$$

- Pentru **μ = 0** avem conservarea energiei totale:

$$p_{init}^{0} = p_{final}^{0} \quad \text{sau} \quad E_{init}^{tot} = E_{final}^{tot}$$

Relaţii în sistemul centrului de masă

Premize:

- ✓ Conservarea energie–impuls total (p^{μ} se conservă)
- ✓ Mărimea $(E^2 - p^2)$ este un invariant relativist
  (*are aceeaşi mărime în toate sistemele de referinţă*)

✓ într-un sistem de referinţă **S**: $\left(p^{\mu}_{init}\right)^2_S = \left(p^{\mu}_{final}\right)^2_S$

✓ în alt sistem **S'**: $\left(p^{\mu}_{init}\right)^2_S = \left(p^{\mu}_{final}\right)^2_S = \left(p^{\mu}_{final}\right)^2_{S'}$ (*invariant relativist*)

Consecinţă:

➢ Într-un proces de interacţiune cantitatea $p^2 = p^{\mu}p_{\mu}$ se conservă în orice sistem de referinţă

➢ În sistemul centrului de masă (SCM)
– centrul de masă al sistemului este în repaus, impulsul este nul)

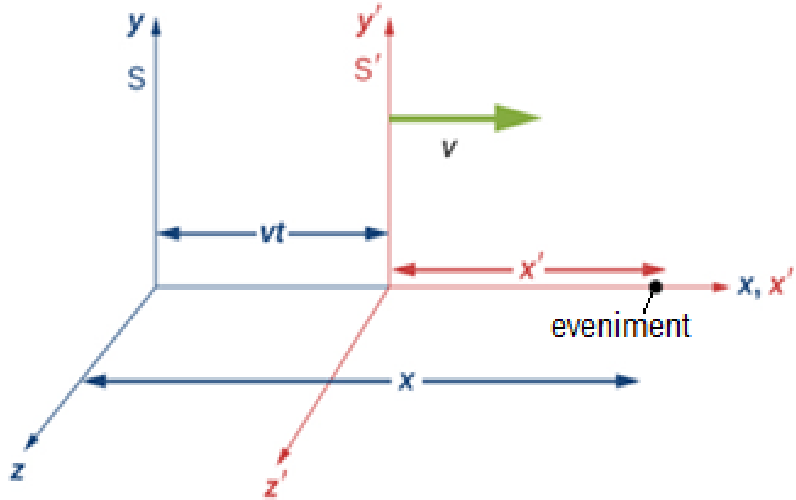
$$\left(p^{\mu}_{init}\right)^2_S = \left(p^{\mu}_{final}\right)^2_S = \left(p^{\mu}_{init}\right)^2_{SCM} = \left(p^{\mu}_{final}\right)^2_{SCM}$$

➢ Întrucât, în SCM vectorul impuls este nul $|\mathbf{p}| = 0$

$$\left(p^{\mu}_{init}\right)^2_{SCM} = \left(p^{0}_{init}\right)^2_{SCM} - \left(|\mathbf{p}|_{init}\right)^2_{SCM} = \left(p^{0}_{init}\right)^2_{SCM} = \left(E^{tot}_{init}\right)_{SCM} = \left(\sum_n E_n\right)^2_{SCM}$$

Transformări Lorentz

- **C**onversia între două măsurători diferite, efectuate de doi observatori diferiți, asupra spațiului și timpului, atunci când un observator este în mișcare uniformă și rectilinie în raport cu celălalt.



S și S' - sisteme de referință inerțiale care se mișcă cu viteza relativă v

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

- **Transformări directe:**

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t')$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$
$$\Delta t = \gamma(\Delta t' + v\Delta x'/c^2)$$

- **Transformări inverse:**

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x/c^2)$$

Consecințe:

- Legile fizicii în sistemele de referință inerţiale sunt aceleași
- Viteza luminii este aceiași pentru toţi observatorii din sisteme inerţiale
- Spațiul și timpul este văzut diferit pentru diferiţi observatori.
  - ✓ contracţia Lorentz: lungimea L (în S) și lungimea L' (în S'): $L = \frac{L'}{\gamma}$
  - ✓ dilatarea timpului: intervalul de timp Δt (în S) și intervalul de timp Δt'(în S'): $\Delta t = \gamma \Delta t'$
- Energia și masa sunt echivalente
  - ✓ $E=mc^2$

Transformări relativiste (Lorentz)

- Două sisteme de referinţă: **S** si **S'**
- Observator din sistemul **S'** care se mişcă pe direcţia **z** cu viteza $\boldsymbol{\beta}$ faţă de sistemul **S**
- Energia şi impulsul în **S** şi **S'** sunt legate prin transformările:

$$\begin{aligned} E' &= \gamma(E - \beta p_z) \\ p'_x &= p_x \\ p'_y &= p_y \\ p'_z &= \gamma(p_z - \beta E) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= \gamma(E' + \beta p'_z) \\ p_x &= p'_x \\ p_y &= p'_y \\ p_z &= \gamma(p'_z + \beta E') \end{aligned}$$

Unde:

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}}$$

OBS:

- Relaţii dintre energie, impuls şi masa particulei care se deplasează cu viteza **β (=*v*/*c*)**:

$$E = \gamma m$$
$$p = \gamma\beta m$$
$$p = \beta E$$

- Componenta 4-a cuadrivectorului impuls nu se schimbă în transformările Lorentz.
- Se folosesc notaţiile: $\mathbf{p_T}$ (*impulsul transversal*-$\mathbf{p_x, p_y}$) şi $\mathbf{p_L}$(*impulsul longitudinal* –$\mathbf{p_z}$).

- Relaţiile de transformare devin:

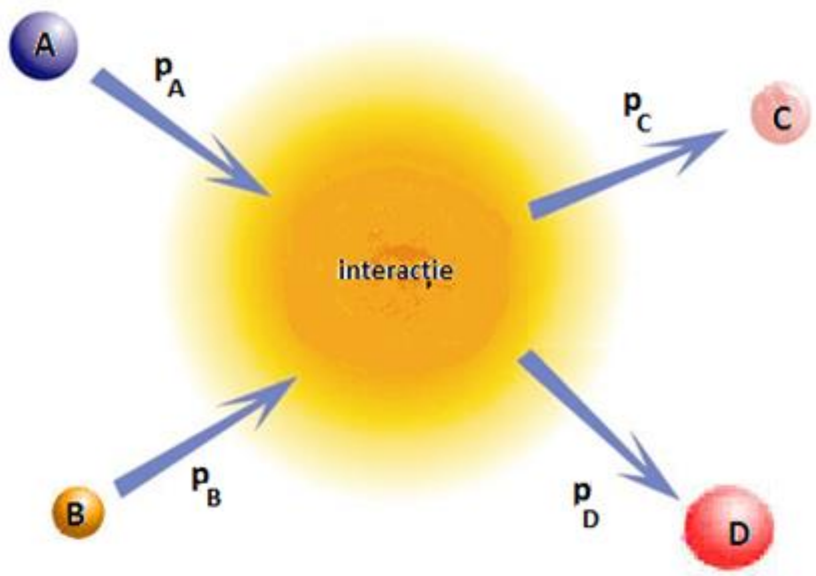
$$E' = \gamma(E - \beta p_L)$$
$$p'_T = p_T$$
$$p'_L = \gamma(p_L - \beta E)$$

$$p_T = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$$
$$p_L = p_z$$

Variabilele Mandelstam

- Pentru caracterizarea interacţiunilor din fizica energiilor înalte, este convenabil să se definească alte variabile (**s**, **t** şi **u**) care *sunt invariante sub transformările Lorentz !*

  - ✓ Să considerăm procesul simplu de împrăştiere : A+B → C+D
  - ✓ Cuadrivectorul impuls se conservă: $\boxed{p^{\mu}_{init} = p^{\mu}_{final}} \Rightarrow \boldsymbol{p_A} + \boldsymbol{p_B} = \boldsymbol{p_C} + \boldsymbol{p_D}$



$\boxed{\mathbf{s}}$ – pătratul energiei totale în Sistemul Centrului de Masă

$$s = (p_A + p_B)^2 = (p_C + p_D)^2 = (E_A + E_B)^2 - (\vec{p_A} + \vec{p_B})^2$$

În SCM $\vec{p_A} + \vec{p_B} = 0$ şi ca urmare

$$\boxed{s = (E_A + E_B)^2 = E_{CM}^2}$$

s - este totdeauna pozitiv

$\boxed{\sqrt{s}\ \textbf{- este energia totală în SCM}}$

$\boxed{\mathbf{t}}$ – pătratul transferului de cuadrimpulsului longitudinal în Sistemul Centrului de Masă

$$\boxed{t = (p_A - p_C)^2 = (p_B - p_D)^2 = (E_A - E_C)^2 - (\vec{p_A} - \vec{p_C})^2}$$

$\boxed{\mathbf{u}}$ – pătratul transferului de cuadrimpulsului transversal în Sistemul Centrului de Masă

$$\boxed{u = (p_A - p_D)^2 = (p_B - p_C)^2}$$

- **Suma variabilelor Mandelstam în SUN este constantă** (în SUN ***E*²-*p*² = *m*²**)

$$\boxed{s + t + u = m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2 = const.}$$

Noţiuni de mecanică cuantică relativistă

- În **mecanica clasică**, mişcarea unei particule sau a unui grup de particule poate fi exprimată în termeni de poziţie a particulei al un anumit moment

- În **mecanica cuantică**, o stare (*sau o mişcare*) a unei particule este exprimată în termeni de funcţii de undă care reprezintă probabilitatea ca o particula să ocupe o anumită poziţie la un moment dat. Cu ajutorul operatorilor putem obţine în principal valorile observabilelor, cum ar fi impulsul, energia, etc.

- În **mecanica cuantică relativistă**, o stare sau o mişcare este exprimată în spaţiu şi timp.Ecuaţiile de mişcare sunt exprimate cu ajutorul langrangianului

- **Langrangeanul:** - *este o funcțională care caracterizează starea unui sistem fizic* (*în mecanică, funcția lagrangiană este diferența* dintre *energia cinetică şi energia potențială*)

$L=T-V$

- Analiza acestei funcții permite determinarea *ecuaţiilor de mişcare* ale sistemului.
- În mecanica clasică, cantitatea fundamentală este *acţiunea*, **S** care depinde de traiectorie.
- Traiectoria este complet definită de timp, poziţie, viteză şi punct final:

$$S[t, q(t), \dot{q}(t)]$$

- Minimizarea acţiunii înseamnă că derivatele acesteia vor fi zero de-a lungul traiectoriei
- Derivata acţiunii la timp este numită Lagrangean, şi prin urmare

$$S = \int L\, dt$$

- În teoria câmpului, lagrangeanul ca funcție de coordonatele generalizate este înlocuit cu o *densitate a Lagrangeanului* ($\mathcal{L}$) care este o funcție a câmpurilor, a derivatelor acestora și/sau a coordonatelor spațiale și temporale. Variabila independentă **t** este înlocuită cu un eveniment în spațiu-timp (**t, x, y, z**).
- Astfel că în cazul comportamentului unui sistem fizic într-un câmp, este util să se ia şi derivata spaţială (*densitatea Lagrangeanului* $\mathcal{L}$)

$$S=\int \mathcal{L}\, dt\, d^3x$$

Langrangianul în teoria câmpului

- Langrangianul Dirac

$$\boxed{\mathcal{L}_{\mathrm{D}} = -c\hbar\bar{\psi}\gamma_{\mu}\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\psi - mc^2\bar{\psi}\psi}$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

- Langrangianul în electrodinamica cuantică

$$\boxed{\mathcal{L}_{\mathrm{QED}} = \bar{\psi}(i\hbar c\gamma^{\mu}D_{\mu} - mc^2)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}$$

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} + \frac{i}{\hbar}eA_{\mu}$$

$$\partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \vec{\nabla}\right)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$$

tensorul câmpului electromagnetic

- Langrangianul în cromodinamica cuantică

$$\boxed{\mathcal{L}_{\mathrm{QCD}} = -\frac{1}{4}F^{(a)}_{\mu\nu}\,F^{(a)\mu\nu} + i\sum_{q}\overline{\psi}^{i}_{q}\,\gamma^{\mu}\,(D_{\mu})_{ij}\,\psi^{j}_{q} - \sum_{q} m_q\,\overline{\psi}^{i}_{q}\,\psi_{qi}}$$

$$F^{(a)}_{\mu\nu} = \partial_{\mu}\,A^{a}_{\nu} - \partial_{\nu}\,A^{a}_{\mu} - g_s\,f_{abc}\,A^{b}_{\mu}\,A^{c}_{\nu}$$

$$(D_{\mu})_{ij} = \delta_{ij}\,\partial_{\mu} + ig_s\,\sum_{a}\frac{\lambda^{a}_{i,j}}{2}A^{a}_{\mu}$$

tensorii câmpului gluonic

Mişcarea nerelativistă pentru particule cu spin 0

- Relaţia energie-impuls în mecanica clasică $$\frac{p^2}{2m} + V = E$$

- Transformări în mecanica cuantică $$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \qquad p \to \frac{\hbar}{i}\nabla$$

sau $$H \equiv i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \qquad p \equiv \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, -i\hbar\frac{\partial}{\partial y}, -i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right) = -i\hbar\nabla$$

- Mişcarea unei particule caracterizată de funcţia de undă $\mathbf{\Psi}$, într-un câmp de forţe este dată de ecuaţia Schrödinger

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}}$$

$|\psi|^2$ – reprezintă probabilitatea de a găsi particula de masă ***m*** într-un punct spaţial caracterizat de coordonatele (x,y,z)

Mişcarea relativistă pentru particule cu spin 0

Ecuaţia Klein – Gordon

- Trecerea de la mecanica cuantică la mecanica cuantică relativistă se face practic prin generalizarea ecuaţiei lui Schrödinger pentru un sistem relativist.
  - ✓ Într-un spaţiu cuadridimensional (***ħ = c = 1***) se scrie

$$\boxed{p^{\mu} = \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, -i\hbar\nabla \right) = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} = i\partial^{\mu}}$$

- Relaţia relativistă energie-impuls

$$p_{\mu} p^{\mu} = E^2 - \left|\vec{p}\right|^2 = m^2$$

✓ Substituind mărimile din ecuaţia Schrödinger relativistă cu reprezentările operatoriale (***ħ = c = 1***) se obţine ecuaţia Klein – Gordon

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \Psi - \left(-i\hbar\nabla \right)^2 \Psi = m^2 \Psi \Leftrightarrow -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + \nabla^2 \Psi = m^2 \Psi$$

sau

$$0 = -\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right)\Psi + m^2\Psi = \left(-\partial_\mu \partial^\mu - m^2\right)\Psi = \left(p^2 - m^2\right)\Psi$$

$$\boxed{-\partial_\mu \partial^\mu \Psi - m^2 \Psi = 0}$$

Ecuaţia Klein – Gordon

În care

$$p^\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} = i\partial^\mu$$

$$p_\mu = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} = -i\partial_\mu$$

- Ecuaţia Klein – Gordon este versiunea relativistă a ecuaţiei lui Schrödinger şi care este folosită în descrierea particulelor fără spin

Mişcarea relativistă pentru particule cu spin 1/2

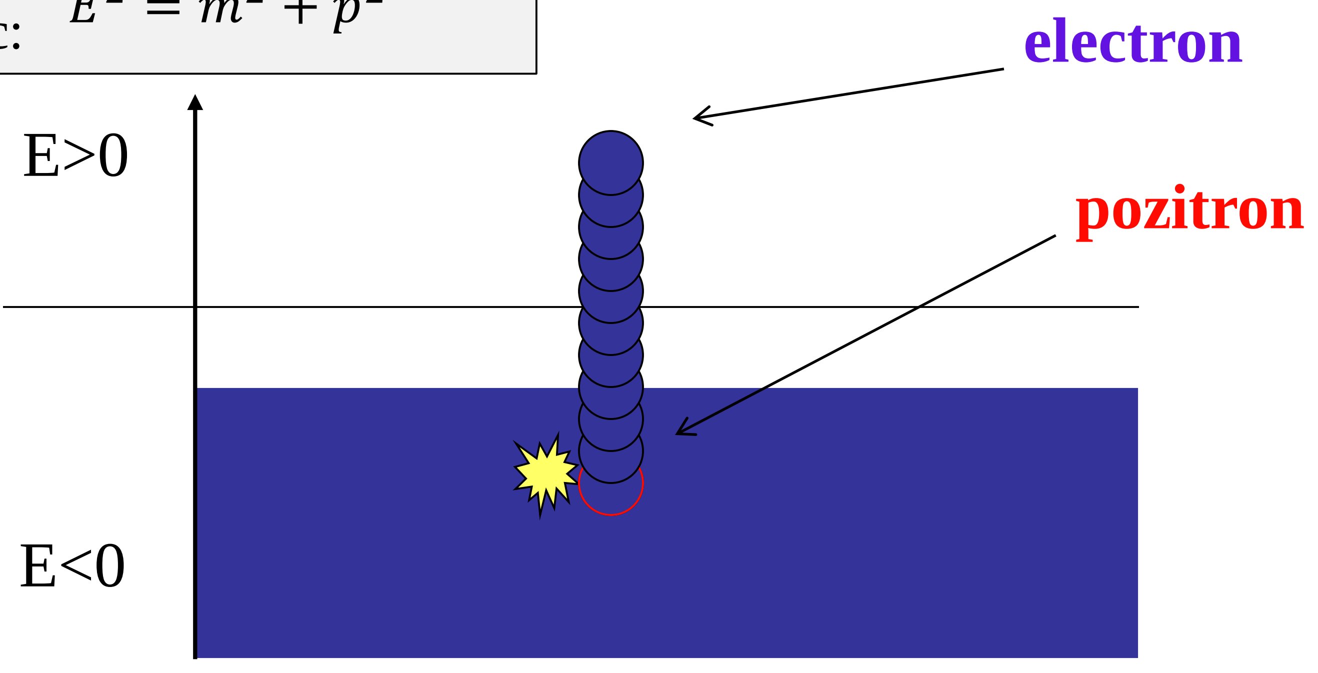
Ecuaţia lui Dirac

- Ecuaţia lui Dirac este ecuaţia undelor a lui Schrödinger în varianta de cuantică relativistă pentru sisteme de particule cu spinul -1/2 (*cum ar fi electronii*).
- Această ecuaţie impune existenţa pozitronului.

✓ clasic : $E = \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{p^2}{2m}$

✓ relativistic: $E^2 = m^2 + p^2$

2 soluţii: $\boxed{E = \pm\sqrt{m^2 + p^2}}$



- Această ecuaţie a fost obţinută de Dirac ca urmarea tentativei de liniarizare a ecuaţiei Klein-Gordon. Pentru aceasta a fost introdus un sistem liniar de patru ecuaţii cuplate. Forma compactă a aceste ecuaţii:

$$\boxed{\left(i\gamma_{\mu}\partial^{\mu} - mI\right)\Psi = 0}$$

în care funcţia de undă este un bispinor cu 4 componente:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix}$$

γ^{μ} (μ = 0, 1, 2, 3) sunt matrici 4x4, iar ***I*** este o matrice identitate de dimensiune 4x4.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{I}_2 \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma}_x \\ -\boldsymbol{\sigma}_x & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma}_y \\ -\boldsymbol{\sigma}_y & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma}_z \\ -\boldsymbol{\sigma}_z & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

.

$$\boldsymbol{\sigma}_x = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\sigma}_y = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{i} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\sigma}_z = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

➢ Ecuaţia lui Dirac este de fapt un sistem de patru ecuaţii cuplate

✓ Din cele 4 componente (grade de libertate) ale bispinorului Ψ, două servesc la reprezentarea unei particule în stările de spin $\pm 1/2$ şi celelalte două la reprezentarea unei antiparticule din stările de spin $\pm 1/2$

$$i\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial z}\right)\Psi_3-\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi_4\right)-m\Psi_1=0$$

Ψ^1 – descrie fermioni (S=1/2) cu masa ***m*** şi spini paraleli (↑)

$$i\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\right)\Psi_4-\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi_3\right)-m\Psi_2=0$$

Ψ^2 – descrie fermioni (S=1/2) cu masa ***m*** şi spini antiparaleli (↓)

$$i\left(-\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial z}\right)\Psi_1-\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi_2\right)-m\Psi_3=0$$

Ψ^3 – descrie antifermioni (S=1/2) cu masa ***m*** şi spini paraleli (↑)

$$i\left(-\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\right)\Psi_2-\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi_1\right)-m\Psi_4=0$$

Ψ^4 – descrie antifermioni (S=1/2) cu masa ***m*** şi spini paraleli (↓)