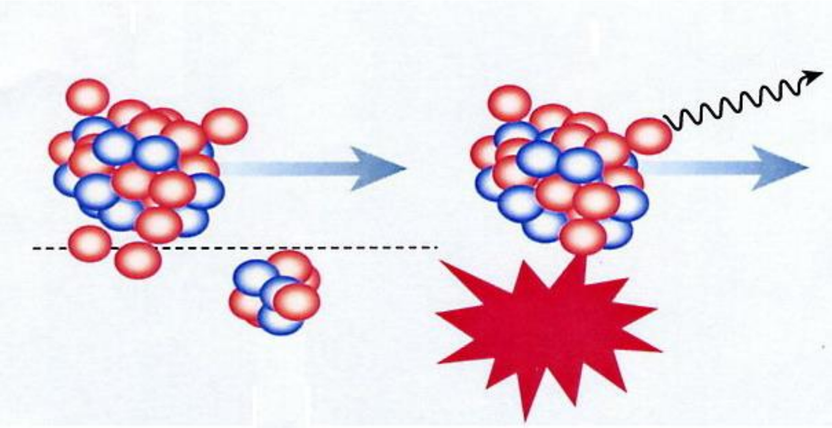
Mărimi caracteristice reacţiilor nucleare



- **Secţiunea eficace de interacţie**
- **Energia de reacţie**

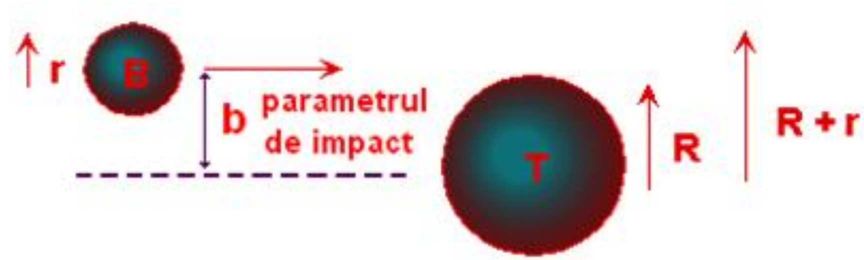
❖ ***Relaţii între mărimi în Sistemul Centrului de Masa (SCM) şi Sistemul Laboratorului (SL)***

❑ Secţiunea eficace de interacţie

- *Probabilitatea de realizare a unei reacţii nucleare* - ***secţiune eficace parţială σ_p***
- ***Secţiunea eficace totală*** - suma secţiunilor eficace parţiale

$$\sigma = \sum_p \sigma_p$$

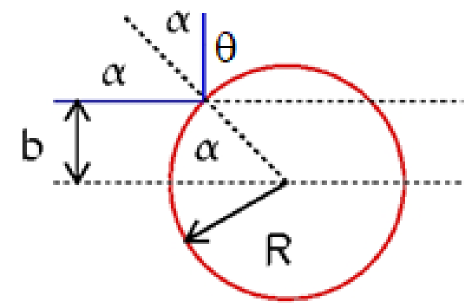
- Secţiunea eficace geometrică



$$\boldsymbol{\sigma_p = \pi b^2}$$

b *– este parametrul de impact şi depinde de unghiul de ciocnire* $\boldsymbol{\theta_p}$

- Secţiunea eficace în cazul ciocnirii elastice:



$$\boldsymbol{\sigma_p(\theta > \theta_p) = \pi b^2}$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\theta}\right) = 2\pi \sin\theta \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_\theta$$

$$\sigma(\theta > \theta_b) = \pi \cdot b^2 \rightarrow \left(\frac{d\sigma}{d\theta}\right)_\theta = 2\pi \cdot b\left|\frac{db}{d\theta}\right| \rightarrow \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_\theta = \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right|$$

- ✓ Relaţia între unghiuri: $2\alpha+\theta=\pi \rightarrow \alpha=\pi/2-\theta/2 \rightarrow$ **$\sin\alpha = \cos(\theta/2)$**
- ✓ Parametrul de impact : $b=R\sin\alpha = R\cos(\theta/2) \rightarrow$ **$(db/d\theta)=(R/2)\sin(\theta/2)$**

$\sin\alpha = 2\cos(\theta/2)\sin(\theta/2)$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_\theta = \frac{R\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}\left(\frac{R}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{R^2}{4}$$

- *Secţiunea eficace totală va fi:*

$$\sigma_T = \frac{R^2}{4}\int d\Omega = \pi R^2$$

- Unitatea de măsură a secţiunii eficace este numită ***barn (b)***

$$\boxed{1b = 10^{-24}cm^2}$$

- *În realitate, **σ** depinde de proprietățile de interacțiune și energia fasciculului → nu poate fi egală cu secțiunea transversală geometrică.*
- Din calcul, secţiunea eficace geometrică este cuprinsă între aproximativ $0.1b$ şi $2.7b$
- Experimental, secţiunile eficace ale reacţiilor nucleare, acoperă o plajă mult mai mare care se întinde între aproximativ ***~10^-19^ b*** şi ***~10^6^ b***
- Plaja largă a valorilor secţiunilor eficace se poate explica prin fenomenele cuantice ale interacţiunii dintre două nuclee

- În procesul de ciocnire sunt impicate şi momentele cinetice care sunt cuantificate:

$$mv \cdot b = l \cdot \hbar$$

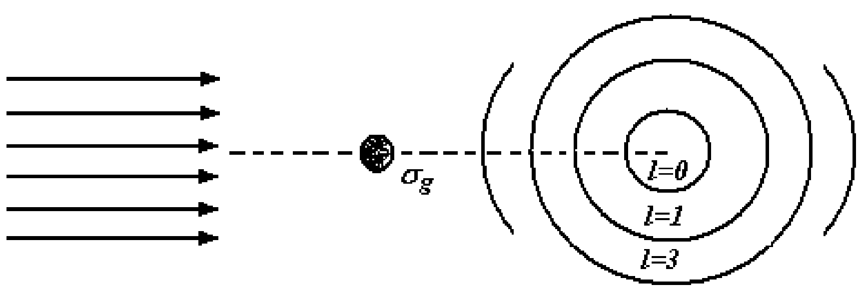
m *-masa nucleului proiectil,*
v *- viteza*
b *- parametrul de impact*
ħ *- constanta Plank redusă*

- Aşadar parametrul de impact este dependent de momentul cinetic ***l*** şi de masa ***m*** al particulei proiectil

$$b = l \cdot \frac{\hbar}{mv} = l \cdot \lambda\!\!\!^{-}$$

$\lambda\!\!\!^{-}$ *- lungimea de undă de Broglie asociată*

- Fasciculul incident poate fi descris de zone cilindrice cu valori ale momentului cinetic *l* bine precizate :
  -prima zonă de ciocnire are $b < \lambda\!\!\!^{-}$
  -următoarea va fi dată de particule cu $\lambda\!\!\!^{-} \le b \le 2 \cdot \lambda\!\!\!^{-}$
  ……………………..
- Suprafaţa efectivă de ciocnire, va fi aria inelară delimitată de parametru de ciocnire cuprins între două valori succesive ale momentului cinetic



$$\sigma_l = \pi b_1^2 - \pi b_2^2 = \pi \cdot \left[(l+1)^2 - l^2\right] \cdot \lambda\!\!\!^{-2} = (2l+1)\pi \lambda\!\!\!^{-2}$$

(cu excepţia împrăştierii elastice)

- Secţiunea eficace va fi sumă după toate momentele cinetice

$$\boxed{\sigma = \pi \bar{\lambda}^2 \sum_l (2l+1)}$$

- ✓ depinde de momentele cinetice şi nu depinde de dimensiunile geometrice
- ✓ depinde puternic de $\bar{\lambda}^2$ (energia şi masa nucleelor) întrucât:

$$\mu = \frac{m\,M}{m+M}$$ masa redusă a sistemului proiectil-ţintă

$$\bar{\lambda}^2 = \hbar^2 \frac{1}{\mu^2 v^2}$$

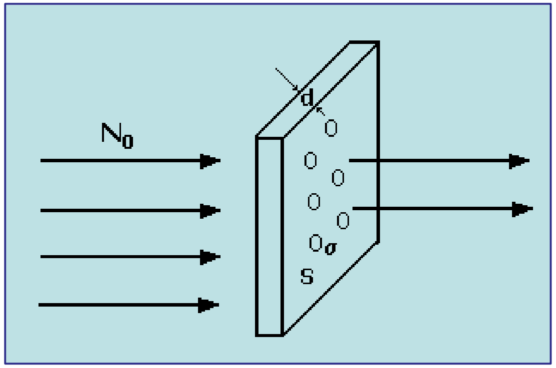
$$v^2 = \frac{2\,E}{m}$$

$$\bar{\lambda} = \hbar^2 \frac{(m+M)^2}{2\,m\,M^2\,E}$$

$$\boxed{\sigma = \pi\hbar 2 \frac{(m+M)^2}{2mM^2E}}$$

(*secţiunea eficace scade când energia particulelor creşte*)

❑ Evaluarea secţiunii eficace



- Ţintă subţire (nucleele ţintă să nu se acopere unele pe altele) de grosimea ***d*** şi de arie ***S*** care conţine ***n*** nuclee
- Fiecare nucleu este caracterizat de o secţiune eficace ***σ*** → ţinta are o arie efectivă *nσ*
- Fluxul iniţial conţine N_0 particule în unitatea de timp

♦ Numărul actelor de interacţie în unitate de timp $\boldsymbol{N_a}$;

$$N_a = N_0 \frac{n\sigma}{S} = N_0 \frac{n}{S}\sigma$$

- Secţiunea eficace se poate defini ca:

$$\sigma = \frac{N_a}{N_0 \frac{n}{S}} = \frac{nr.\, acte\ de\ ineractie}{nr.\, partic.\, incidente \times nr.\, nuclee\ \ pe\ cm^2}$$

✓ Dacă *N(x)* numărul de particule din fasciculul care interacţionează cu stratul din ţintă de grosime *dx*, numărul actelor de interacţiune va fi:

$$N(x)\, n_0\, \sigma\, dx$$ ($\mathbf{n_0}$ - numărul de nuclee ţintă în unitatea de volum)

- Scăderea numărului de particule proiectil din fascicul va fi

$$dN(x) = N(x)\, n_0\, \sigma\, dx$$

- Integrare pe o grosimea d a ţintei

$$\int_{N_0}^{N} \frac{dN}{N} = -\int_0^d n_0 \sigma dx \Rightarrow N = N_0 e^{-n_0\sigma d} = N_0 e^{\Sigma d}$$

(atenuarea unui fascicul printr-o ţintă groasă)

- ✓ Numărul actelor de interacţiune

$$N_a = N_0 - N = N_0\left(1 - e^{-n_0 \sigma d}\right)$$

- ✓ Ţinte subţiri $n_0 \sigma d << 1$

$$\Downarrow$$

$$N_a = N_0\left(1 - 1 + n_0\sigma d + \ldots\right) = N_0 n\sigma$$

- ✓ Condiţia de ţintă subţire

$$n_0\sigma d = \frac{n}{Sd}\sigma d = n_s \sigma << 1$$

$\boldsymbol{n_s}$ - numărul mediu de nuclee pe unitatea de suprafaţă

- Determinarea experimentală a secţiunii eficace totală - metoda transmisiei (măsurarea numărului iniţial de nuclee care interacţionează cu o ţintă)

  - ✓ legea de atenuare $N = N_0 e^{-n_0 \sigma d}$

$$\boxed{\sigma = \frac{1}{n_0 d} ln \frac{N_0}{N}}$$

- Secţiunea parţială σ_p (dă numărul de particule de un anumit tip la o energie dată)

  - ✓ Modul de distribuţie a nucleelor emergente faţă de direcţia incidentă:

$$\underbrace{\sigma_p(\theta, \varphi) = \frac{d\sigma_p}{d\Omega} \quad d\Omega = sin\,\theta\, d\theta\, d\varphi}$$

$$d\sigma_p = \sigma_p(\theta, \varphi) sin\,\theta\, d\theta\, d\varphi$$

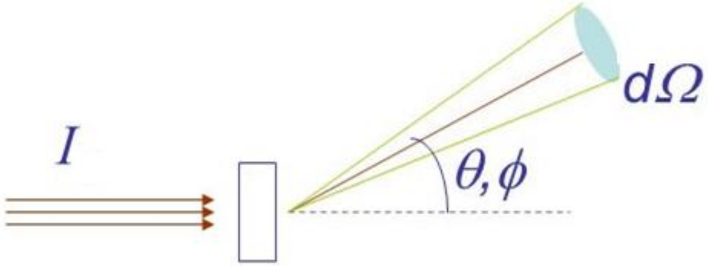
$$\boxed{\sigma_p = \int_0^{\pi} \sigma(\theta) sin\,\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi}$$

- Secţiunea eficace totală – suma tuturor secţiunilor parţiale

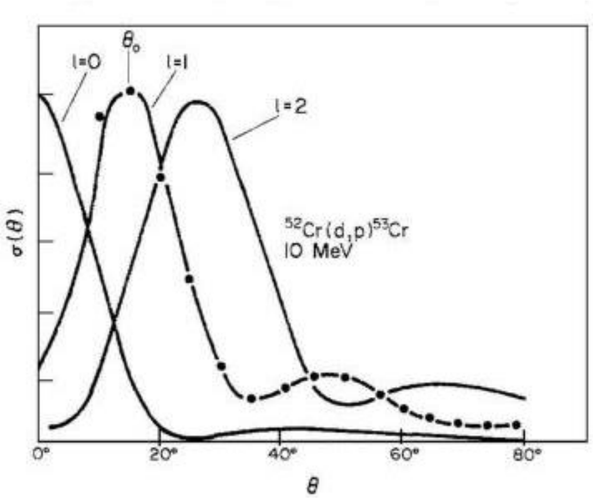
$$\sigma = \sum_i \sigma_p^i$$

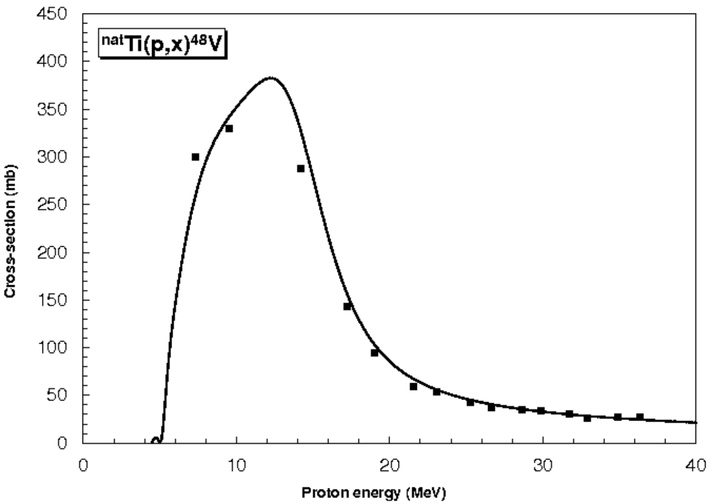
- Secţiunea eficace diferenţială - dependenţa secţiunii de unghiul solid de împrăştiere

$$\sigma(\theta,\varphi) = \frac{d\sigma_p}{d\Omega} \qquad d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$



- Dependenţa secţiunii eficace diferenţiale de unghiul de împrăştiere poartă numele de distribuţie unghiulară
- Dependenţa secţiunii eficace de energie, se numeşte *funcţie de excitaţie*





- Valori tipice ale secțiunii eficace

✓ Dependență foarte puternică a secțiunilor eficace de energia particulelor fasciculului și de caracterul interacțiunii.

✓ Valorile se încadrează într-un interval foarte larg:

$$\boldsymbol{\sim 10^{-47}\ \mathrm{m}^2 \div \sim 10^{-24}\ \mathrm{m}^2 \rightarrow \sim 10^{-19}\ \text{barni} \div \sim 10^{4}\ \text{barni}}$$

- Interacțiunea tare (interacțiunea nucleonilor și a altor hadroni)

$$\sim 10^{-30}\ \mathrm{m}^2 \div \sim 10^{-24}\ \mathrm{m}^2 \rightarrow \sim 0.01\ \text{barni} \div \sim 10^{4}\ \text{barni}$$

- Interacțiune electromagnetică (reacția leptonilor încărcați sau a fotonilor):

$$\sim 10^{-35}\ \mathrm{m}^2 \div \sim 10^{-30}\ \mathrm{m}^2 \rightarrow \sim 0.1\ \mu\text{barni} \div \sim 10\ \text{mbarni}$$

- Interacțiune slabă (reacții neutrino):

$$\approx 10^{-47}\ \mathrm{m}^2 = 10^{-19}\ \text{barni}$$

❑ Energia de reacţie

- Legea conservării energiei totale într-o reacţie binară *X(a,b)Y*

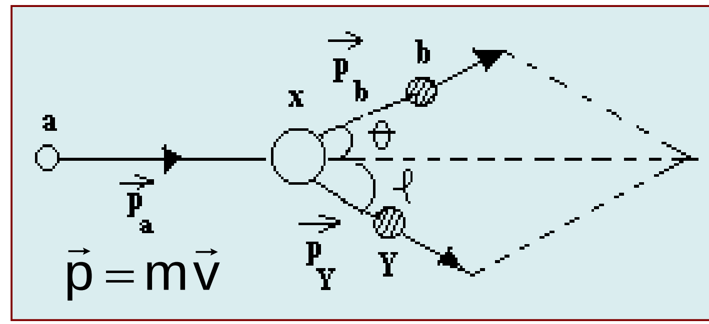
$$\boxed{\left(M_x + m_a\right)c^2 + E_a = \left(M_y + m_b\right)c^2 + E_b + E_y}$$

  - ✓ energia de reacţie Q

$$\boxed{Q = E_b + E_Y - E_a = \left(M_X + m_a\right)c^2 - \left(M_Y + m_b\right)c^2}$$

- Legea conservării impulsului total (ţintă în repaus)

$$\boxed{\vec{p}_a = \vec{p}_b + \vec{p}_y}$$



$$p_y^{\,2} = p_a^{\,2} + p_b^{\,2} - 2 p_a p_b \cos\theta$$

înlocuind

$$\boxed{Q = E_b + \frac{p_y^{\,2}}{2M_y} - \frac{p_a^{\,2}}{2m_a} = E_b\left(1 + \frac{m_b}{M_y}\right) - E_a\left(1 - \frac{m_a}{M_y}\right) - 2\frac{\sqrt{m_a m_b E_a E_b}}{M_y}\cos\theta}$$

- Energia de reacţie
  - ✓ dependentă de energia cinetică a particulei incidente, emergente şi de unghiul de împrăştiere a acesteia
  - ✓ independentă de mecanismul de reacţie

- Dependenţa energiei cinetice a particulei emergente de unghiul de împrăştiere

$$\boxed{E_b-\sqrt{E_b}\left(2\frac{\sqrt{m_a m_b E_a}}{M_y+m_b}\cos\theta\right)-\left(E_a\frac{M_y-m_a}{M_y+m_b}+Q\frac{M_y}{M_y+m_b}\right)=0}$$

✓ ecuaţie de gradul doi în variabila $\sqrt{E_b}$

✓ Soluţia trebuie să fie o mărime reală şi pozitivă :

$$\boxed{\sqrt{E_b}=\frac{\sqrt{m_a m_b}}{M_y+m_b}\sqrt{E_a}\times\left[\cos\theta\pm\sqrt{\cos^2\theta+\frac{(M_y+m_b)(M_y-m_a)}{m_a m_b}+\frac{M_y(M_y+m_b)}{m_a m_b}\frac{Q}{E_a}}\right]}$$

- *Pentru* ***reacţii exoenergetice***, $Q>0$ şi $M_y>m_a$ -soluţia pozitivă ("+") sens fizic

  ✓ energia particulei emergente (E_b) este **maximă** pentru $\boldsymbol{\theta=0}$ şi **minimă** pentru $\boldsymbol{\theta=\pi}$.

  ✓ pentru $\boldsymbol{\theta=\pi/2}$:
  $$E_b=\frac{(M_y-m_a)E_a+M_yQ}{M_y+m_a}$$

- *Pentru* ***reacţii endoenergetice***, $Q<0$ şi $M_y>m_a$, - soluţiile reale dacă:

$$\boxed{E_a\geq\frac{-Q\cdot M_y(M_y+m_b)}{m_a m_b\cos^2\theta+(M_y+m_b)(M_y-m_a)}}$$

- valorile extreme ale energiei incidente corespund unghiurilor : *θ=0 şi θ=π/2.*

$$\left(E_a\right)_{\theta=0} \geq -Q\frac{M_y + m_b}{M_y + m_b - m_a} \qquad \left(E_a\right)_{\theta=\frac{\pi}{2}} \geq -Q\frac{M_y}{M_y - m_a}$$

► *particulele emergente sunt emise într-un con centrat pe unghiul θ=0 şi cu o deschidere 2 θ_{max}*

$$cos^2\theta_{max} = -\frac{\left(M_y + m_b\right)\left[M_y \cdot Q + \left(M_y - m_a\right)E_a\right]}{m_a m_b E_a}$$

- Energia minimă a proiectilului (***θ=0***) necesară pentru ca o reacţie endotermă să poată avea loc poartă numele de ***energie de prag***

$$\left(E_a\right)_{prag} = -Q\frac{M_y + m_b}{M_y + m_b - m_a}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left(M_y + m_b - m_a\right)c^2 = M_x c^2 - Q \\ Q \ll M_x c^2 \quad M_y + m_b - m_a \cong M_x \end{array}\right\} \quad \left(E_a\right)_{prag} = -Q\frac{M_x + m_a}{M_x} = |Q|\frac{M_x + m_a}{M_x}$$

(cazul nerelativist)

- Pentru valori ale energiei cinetice a proiectilului egale cu energia de prag, particulele emergente vor fi emise în direcţia înainte (θ=0) cu energia:

$$E_b = \frac{m_a m_b}{\left(M_y + m_b\right)^2} \left(E_a\right)_{prag}$$

- Relaţiile privitoare la energia de reacţie au fost stabilite în ipoteza că nucleele reziduale se obţin în stare fundamentală

- În realitate, nucleul emergent rămâne într-o stare excitată, cu energia de excitare ε_γ

$$\left(M_x + m_a\right)c^2 + E_a = \left(M_y + m_b\right)c^2 + E_b + E_y + \varepsilon_y$$

$$Q_0 = E_b + E_y - E_a = Q - \varepsilon_y$$

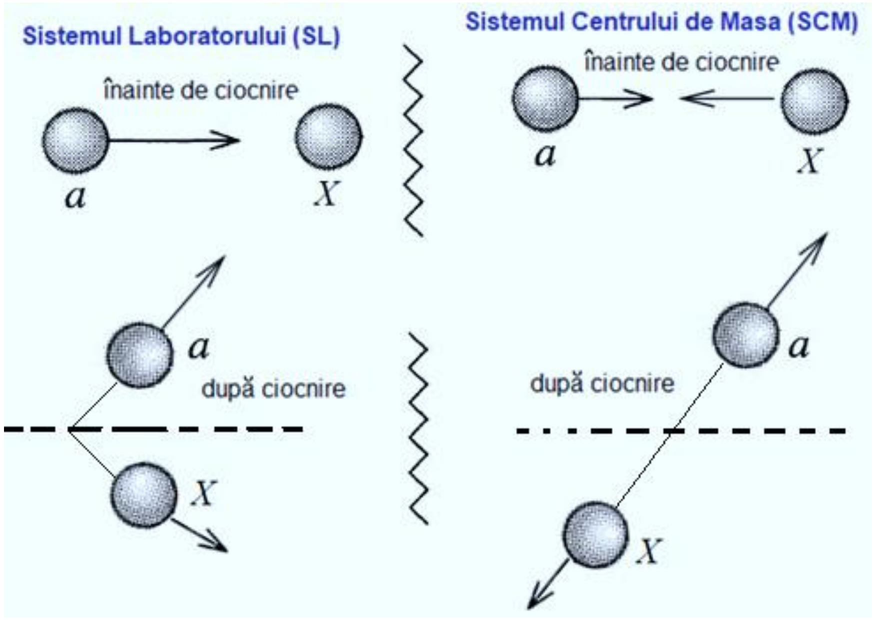
- Relaţiile energetice deduse anterioar rămân la fel dacă se înlocuieşte Q prin:

$$Q_0 = Q - \varepsilon_y$$

❑ Relaţii între mărimi în SCM şi SL

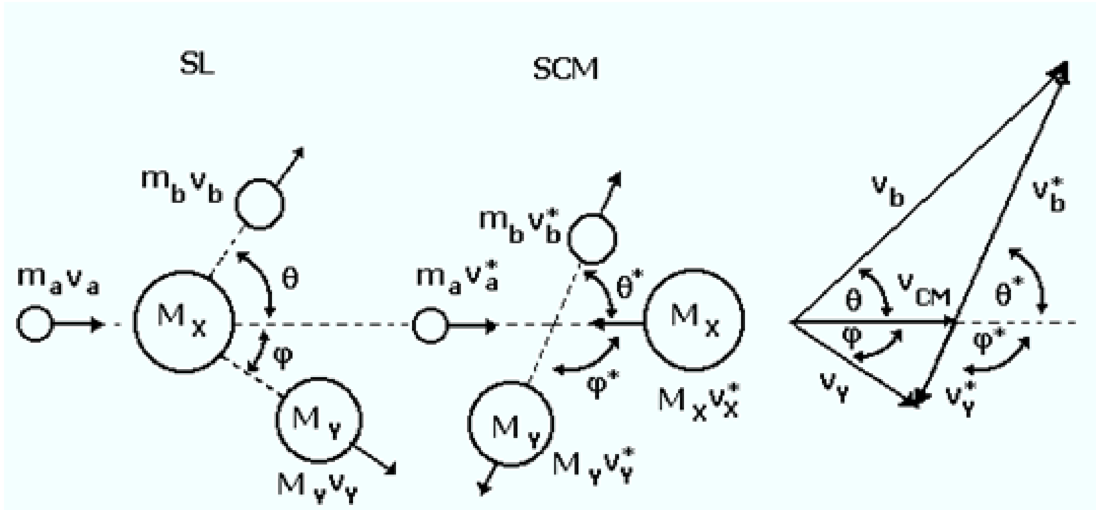
- În studiul reacţiilor nucleare, mărimi cum ar fi viteza, energia, impulsul, secţiunea eficace, funcţiile de corelaţie unghiulară etc, sunt măsurate în sistemul de referinţă al laboratorului (SL)

- În SCM, studiul a două particule aflate în interacţiune se reduce la studiul unei singure particule "de masă redusă" într-un potenţial care poate fi considerat central.



- Interpretarea teoretică a reacţiilor nucleare binare X(a,b)Y se face faţă de sistemul de referinţă în care centrul de masă al sistemului este în repaus, adică în sistemul centrului de masă (SCM)

- În cazul reacţiilor cu emisie de mai multe particule, acestea pot fi reduse la interacţii binare şi deci la mişcarea unei singure particule de masă redusă



➢ Conservarea impulsului în SCM

$$\vec{p}_a^{\,*} + \vec{p}_x^{\,*} = 0$$

$$v_a^* - v_x^* = v_a$$

$$v_a^* = \frac{M_x}{M_x + m_a} v_a \quad \text{viteza proiectilului}$$

$$v_x^* = -\frac{m_a}{M_x + m_a} v_a \quad \text{viteza ţintei}$$

➢ Energia cinetică în SCM

$$E_a^* + E_x^* = \frac{m_a}{2} v_a^{*2} + \frac{M_x}{2} v_x^{*2} = \frac{M_x m_a}{2(M_x + m_a)} v_a^2 = \frac{1}{2}\mu \cdot v_a^2 = E_a \cdot \frac{M_x}{M_x + m_a}$$

$$\mu = \frac{M_x m_a}{(M_x + m_a)}$$

masa redusă proiectil-ţintă

- Energia totală pentru un proces binary (a+X→b+Y)
  - În SL

$$\left(M_x + m_a\right)c^2 + E_a = \left(M_y + m_b\right)c^2 + E_b + E_y$$

  - În SCM

$$E_a{}^* + E_x{}^* + \left(M_x c^2 + m_a c^2\right) = E_b{}^* + E_y{}^* + \left(M_y + m_b\right)c^2$$

- Energia de reacţie este independentă de sistemul de referinţă

$$Q_0 = \left(E_b{}^* + E_y{}^*\right) - \left(E_a{}^* + E_x{}^*\right)$$

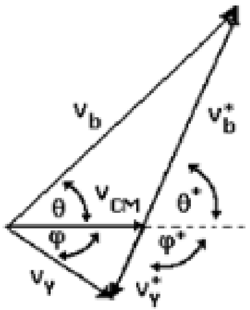
- Energia de prag se determină din condiţia ca energia nucleelor emergente să fie minimă (zero)

$E_b^* + E_Y^* = 0$ Ca urmare, în SCM $\vec{p}_b{}^* + \vec{p}_y{}^* = 0$

- Viteza centrului de masă se determină din conservarea impulsului total în SL

$$\vec{v}_a m_a = \left(m_a + M_x\right)\vec{v}_{CM} \Rightarrow \vec{v}_{CM} = \frac{m_a}{M_x + m_a}\vec{v}_a$$

- Conform diagramei de compunere vectorială a vitezelor, în SCM



$$\vec{v}_b = \vec{v}_b{}^* + \vec{v}_{CM}$$

$$v_b \cos\theta = v_b{}^* \cos\theta^* + v_{CM}$$

$$v_b \sin\theta = v_b{}^* \sin\theta^*$$

$$\frac{v_b}{v_b{}^*} = \frac{\sin\theta^*}{\sin\theta}$$

- Secţiunea eficace în SL si SCM, depinde de viteza şi unghiul de împrăştiere
  - ✓ Se defineşte raportul:

$$\beta = \frac{v_{CM}}{v_b^*} = -\cos\theta^* + \frac{v_b}{v_b^*}\cos\theta = -\cos\theta^* + \frac{\sin\theta^*}{\sin\theta}\cos\theta = \frac{\cos\theta\sin\theta^* - \sin\theta\cos\theta^*}{\sin\theta} = \frac{\sin(\theta^* - \theta)}{\sin\theta}$$

$$\sin(\theta^* - \theta) = \beta\sin\theta \Rightarrow \theta^* - \theta = \arcsin(\beta\sin\theta)$$

$$\theta^* = \theta + \arcsin(\beta\sin\theta)$$

$$d\theta^* = d\theta + d[\arcsin(\beta\sin\theta)] = d\theta + \frac{\beta\, d(\sin\theta)}{\sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta}} = d\theta + \frac{\beta\cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta}}d\theta =$$

$$= d\theta\left\{\left[\beta\cos\theta + \sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta}\right]\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta}}\right\} = d\theta\left[\beta\cos\theta + \sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta}\right]\frac{1}{\cos(\theta^* - \theta)}$$

$$\boxed{\frac{d\theta}{d\theta^*} = \cos(\theta^* - \theta)\left[\beta\cos\theta + \sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta}\right]^{-1}}$$

- Relaţia permite stabilirea legăturii dintre secţiunile diferenţiale definite în cele două sisteme de referinţă, pornind de la condiţia de conservare a fluxului de particule emise în elementul de unghi solid $d\Omega$(SL) cu cel de particule emise în elementul de unghi solid $d\Omega^*$ (în SCM)

$$\boxed{\sigma(\theta)\cdot d\Omega = \sigma^*(\theta^*)\cdot d\Omega^*}$$

✓ În SCM

$$\sigma^*(\theta^*) = \sigma(\theta)\cdot\frac{d\Omega}{d\Omega^*} = \sigma(\theta)\frac{\sin\theta\cdot d\theta}{\sin\theta^* d\theta^*} = \sigma(\theta)\frac{d(\cos\theta)}{d(\cos\theta^*)}$$

$$\sin\theta^* = \sin[\theta + \arcsin(\beta\sin\theta)] = \sin\theta\cdot\cos[\arcsin(\beta\sin\theta)] + \cos\theta\cdot\sin[\arcsin(\beta\sin\theta)] =$$
$$= \cos\theta\cdot\beta\cdot\sin\theta\cdot\sin\theta\sqrt{1-\sin^2[\arcsin(\beta\cdot\sin\theta)]} = \beta\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta + \sin\theta\sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta}$$

$$\frac{\sin\theta^*}{\sin\theta} = \beta\cdot\cos\theta + \sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta} \Rightarrow \frac{\sin\theta}{\sin\theta^*} = \left[\beta\cdot\cos\theta + \sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta}\right]^{-1}$$

$$\sigma^*(\theta^*) = \sigma(\theta)\cdot\frac{\sin\theta}{\sin\theta^*}\cdot\frac{d\theta}{d\theta^*} = \sigma(\theta)\cdot\left[\beta\cdot\cos\theta + \sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta}\right]^{-2}\cdot\cos(\theta^* - \theta)$$

✓ Întrucât $\cos(\theta^* - \theta) = \sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta}$

$$\sigma^*(\theta^*) = \sigma(\theta)\cdot\sqrt{1-\beta^2\cdot\sin^2\theta}\cdot\left[\beta\cdot\cos\theta + \sqrt{1-\beta^2\cdot\sin^2\theta}\right]^{-2}$$

➢ Între secţiunile eficace totale există relaţia:

$$\sigma = \int\sigma(\theta)d\Omega = \int\sigma^*(\theta^*)d\Omega^* = \sigma^*$$

(*numărul proceselor de un anumit tip nu depind de sistemul de referinţă*)

✓ Evaluarea parametrului β $\beta = \frac{V_{CM}}{V_b^*}$

✓ viteza particulei emergente în cele două sisteme de referinţă

$$\vec{v}_b = \vec{v}_b^{\,*} + \vec{v}_{CM} \Rightarrow \vec{v}_b^{\,*} = \vec{v}_b - \vec{v}_{CM} \quad ⇨ \quad v_b^{*2} = v_b^2 + v_{CM}^2 - 2v_b v_{CM}\cos\theta$$

✓ În SL $\vec{p}_a = \vec{p}_b + \vec{p}_y$ ⇨ $p_y^2 = p_a^2 + p_b^2 - 2p_a p_b \cos\theta$

$$p_a = p_b\cos\theta + p_y\cos\varphi$$

$$0 = p_b\cos\theta + p_Y\sin\varphi$$

✓ În SL - ţinta este în repaus ⇨ $Q_0 = E_b + E_y - E_a$

✓ energia cinetică a nucleului de recul $E_y = \frac{m_y v_y^2}{2} = \frac{p_y^2}{2M_y} = \frac{p_a^2}{2M_y} + \frac{p_b^2}{2M_y} - \frac{2p_a p_b}{2M_y}\cos\theta$

$$Q_0 = E_b - E_a + \frac{p_a^2}{2M_y} + \frac{p_b^2}{2M_y} - \frac{p_a p_b}{M_y}\cdot\cos\theta = E_b - E_a + \frac{E_a m_a}{M_y} + \frac{E_b m_b}{M_y} - 2\frac{\sqrt{E_a E_b}\cdot\sqrt{m_a m_b}}{M_y}\cos\theta =$$

$$= E_b\left(1 + \frac{m_b}{M_y}\right) - E_a\left(1 - \frac{m_a}{M_y}\right) - 2\frac{\sqrt{m_a m_b}\cdot\sqrt{E_a}\cdot\sqrt{E_b}}{M_y}\cos\theta$$

sau:

$$E_b - \sqrt{E_b}\left(2\frac{\sqrt{m_a m_b E_a}}{M_y + m_b}\cdot\cos\theta\right) - \left(E_a\frac{M_y - m_a}{M_y + m_b} + Q_0\frac{M_y}{M_y + m_b}\right) = 0$$

$$\beta = \frac{v_{CM}}{v_b^*} \quad \text{de unde} \quad v_b^* = \frac{v_{CM}}{\beta}$$

$$\left(v_b^*\right)^2 = (v_b)^2 + (v_{CM})^2 - 2v_{CM}V_b\cos\theta$$

$$\frac{v_{CM}^2}{\beta^2} = (v_b)^2 + (v_{CM})^2 - 2v_{CM}v_b\cos\theta$$

$$v_b^2 - v_b\left(2v_{CM}\cos\theta\right) - v_{CM}^2\left(-1+\frac{1}{\beta^2}\right) = 0$$

✓ Relaţia $E_b - \sqrt{E_b}\left(2\frac{\sqrt{m_a m_b E_a}}{M_y + m_b}\cdot\cos\theta\right) - \left(E_a\frac{M_y - m_a}{M_y + m_b} + Q_0\frac{M_y}{M_y + m_b}\right) = 0$ se poate scrie

$$\frac{m_b}{2}v_b^2 - v_b\left(2\frac{\sqrt{m_a m_b E_a}}{M_y + m_b}\cdot\frac{\sqrt{m_b}}{\sqrt{2}}\right)\cos\theta - \left(E_a\frac{M_y - m_a}{M_y + m_b} + Q_0\frac{M_y}{M_y + m_b}\right) = 0$$

$$v_b^2 - v_b\left(\frac{4}{m_b}\frac{\sqrt{m_a \cdot E_a}\cdot m_b}{\sqrt{2}}\cos\theta\right) - \left(E_a\frac{2}{m_b}\frac{M_y - m_a}{M_y + m_b} + Q_0\frac{2\,M_y}{m_b\left(M_y + m_b\right)}\right) = 0$$

$$v_{CM}^2\left(-1+\frac{1}{\beta^2}\right) = \frac{2E_a\left(M_y - m_a\right)}{m_b\left(M_y + m_b\right)} + \frac{2Q_0M_y}{m_b\left(M_y + m_b\right)}$$

$$\frac{m_b v_{CM}^2\left(M_y + m_b\right) - 2E_a\left(M_y - m_a\right) - 2Q_0M_y}{m_b\left(M_y + m_b\right)} = \frac{v_{CM}^2}{\beta^2}$$

- În SCM viteza centrului de masă este dată de:

$$v_{CM}^2 = \frac{m_a^2 v_a^2}{(M_x + m_a)^2} = \frac{2m_a \cdot E_a}{(M_x + m_a)^2} = \frac{2m_a \cdot E_a}{(M_y + m_b)^2} \quad \text{întrucât} \quad M_x + m_a = M_y + m_b$$

- ✓ Înlocuind

$$\beta^2 = \frac{m_b(M_y + m_b)\cdot v_{CM}^2}{m_b(M_y + m_b)\cdot v_{CM}^2 - 2E_a(M_y - m_a) - 2Q_0 M_y} = \frac{m_b m_a}{M_Y\left[M_Y + m_b - m_a + \frac{Q_0}{E_a}(M_X + m_a)\right]}$$

însă $m_b - m_a = M_x - M_y$

$$\boxed{\beta^2 = \frac{m_a m_b}{M_x M_y\left(1 + \frac{Q_0}{E_a}\frac{M_x + m_a}{M_x}\right)}}$$

- Relaţii inverse, permit transformarea expresiile secţiunilor eficace din SCM în SL
  - ✓ Se pleacă de la: $v_b^* = \frac{v_{CM}}{\beta} \Rightarrow \beta = \frac{v_{CM}}{v_b^*}$

$$\vec{v}_b = \vec{v}_b^* + \vec{v}_{CM} \Rightarrow \begin{cases} v_b \cos\theta = \frac{v_{CM}}{\beta}\cos\theta^* + v_{CM} \\ v_b \sin\theta = \frac{v_{CM}}{\beta}\sin\theta^* \end{cases}$$

  - ✓ Se obţine: $\cos\theta = \frac{\beta + \cos\theta^*}{\sqrt{\beta^2 + 2\beta\cos\theta^*}} \Rightarrow d(\cos\theta) = \frac{1 + \beta\cos\theta^*}{(\beta^2 + 2\beta\cos\theta^* + 1)^{\frac{3}{2}}} d(\cos\theta^*)$

- Secţiunea eficace în SL, funcţie de secţiunea eficace din SCM

$$\sigma(\theta) = \sigma^*(\theta^*)\frac{d\Omega^*}{d\Omega} = \sigma^*(\theta^*)\frac{d(\cos\theta^*)}{d(\cos\theta)} = \sigma^*(\theta^*)\frac{(\beta^2 + 2\beta\cos\theta^* + 1)^{\frac{3}{2}}}{1 + \beta\cos\theta^*}$$

- *Pentru împrăştierea elastică*, vom avea

$$M_x = M_y = M \quad m_a = m_b = m \quad Q = 0 \Rightarrow \beta = \frac{m}{M} \qquad v_{CM} = \frac{m}{M+m}v_a$$

✓ Notând cu $E_0=E_a$ energia incidentă şi cu E energia cinetică emergentă în SL

$$E_0 = E_a = \frac{mv_a^2}{2} \Rightarrow E = \frac{mv_b^2}{2} = \frac{m}{2}\cdot\frac{v_{CM}^2}{\beta^2}(1 + 2\beta\cos\theta^* + \beta^2)$$

✓ Energia cinetică a particulei emergente în împrăştierea elastică:

$$E = \frac{m}{2}\cdot\frac{m^2}{(M+m)^2}v_a^2\frac{M^2}{m^2}\left(1 + 2\frac{m}{M}\cos\theta^* + \frac{m^2}{M^2}\right) = \frac{mv_a^2}{2}M^2\left[\frac{M^2 + 2mM\cos\theta^* + m^2}{M^2(M+m)^2}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$E = E_0\frac{M^2 + 2mM\cos\theta^* + m^2}{(M+m)^2}$$

✓ Energia cinetică a nucleului de recul

$$E_r = E_0 - E = E_0\frac{4mM}{(M+m)^2}\sin^2\frac{\theta^*}{2}$$

a. Dacă **m<<M** implică β<<1 (ex. împrăştierii neutronilor pe nuclee foarte grele)

$$\theta^* = \theta + \arcsin(\beta \sin\theta) \cong \theta$$

$$\sigma(\theta) = \sigma^*(\theta^*)\frac{\left(1 + 2\beta\cos\theta^* + \beta^2\right)^{\frac{3}{2}}}{1 + \beta\cos\theta^*} \cong \sigma^*(\theta^*)$$

$$E \cong E_0$$

$$E_r = E_0 - E \cong 0$$

b. Dacă **m=M** implică β=1 $\theta^* = \theta + \arcsin(\sin\theta) = \theta + \theta \Rightarrow \theta = \dfrac{\theta^*}{2}$

$$\sigma(\theta) = \sigma^*(\theta^*)\cdot\frac{\left(2 + 2\cos\theta^*\right)^{\frac{3}{2}}}{1 + \cos\theta^*} = \sigma^*(\theta^*)\frac{\left[2\left(1 + \cos\theta^*\right)\right]^{\frac{3}{2}}}{1 + \cos\theta^*} = \sigma^*(\theta^*)\cdot 2\sqrt{2\left(1 + \cos\theta^*\right)} =$$

$$= \sigma^*(\theta^*)\cdot 2\cdot\sqrt{2\left(\sin^2\frac{\theta^*}{2} + \cos^2\frac{\theta^*}{2} - \sin^2\frac{\theta^*}{2} + \cos^2\frac{\theta^*}{2}\right)} = 4\sigma^*(\theta^*)\cos\frac{\theta^*}{2}$$

sau

$$\sigma(\theta) = 4\sigma^*(\theta^*)\cos\theta$$

$$E = E_0\frac{M^2 + 2mM\cos\theta^* + m^2}{(M+m)^2} = E_0\frac{2M^2\left(1 + \cos\theta^*\right)}{4M^2} = \frac{E_0}{2}\cos^2\frac{\theta^*}{2} = E_0\cos^2\theta$$

$$E_r = E_0 - E = E_0\left(1 - \cos^2\theta\right) = E_0\sin^2\theta$$

- Se poate arăta că între spectrul energetic al particulelor emergente în SL şi secţiunea eficace diferenţială definită în SCM există relaţia:

$$\sigma(E_b)dE_b = \frac{1}{2}\sigma^*(\theta^*)\cdot\left|d(\cos\theta^*)\right|$$

- Din relaţia energiei de reacţie, avem:

$$Q_0 = E_b\left(1+\frac{m_b}{M_y}\right) - E_a\left(1-\frac{m_a}{M_y}\right) - \frac{2\sqrt{m_a m_b}\cdot\sqrt{E_a}\cdot\sqrt{E_b}}{M_y}\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{E_b(M_y+m_b) - E_a(M_y-m_a) - Q_0 M_y}{2\sqrt{m_a m_b E_a E_b}} = \frac{\sqrt{E_a m_a m_b}}{\beta(M_x+m_a)\sqrt{E_b}}\left(\cos\theta^* + \beta\right)$$

şi ca urmare

$$\frac{d(\cos\theta^*)}{dE_b} = \beta\frac{(M_x+m_a)\cdot(M_y+m_b)}{2E_a m_a m_b}$$

- Spectrul energetic va fi

$$\sigma(E_b) = \sigma^*(\theta^*)\cdot\frac{(M_x+m_a)\cdot(M_y+m_b)}{4E_a\cdot\sqrt{m_a m_b M_x M_y}}\cdot\left(1+\frac{M_x+m_a}{M_x}\cdot\frac{Q_0}{E_a}\right)^{-\frac{1}{2}}$$