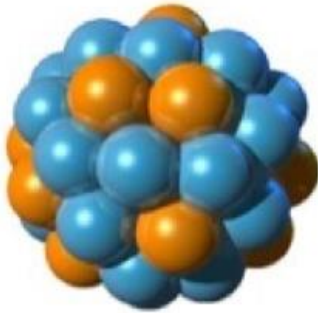
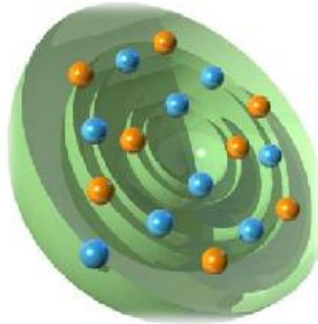


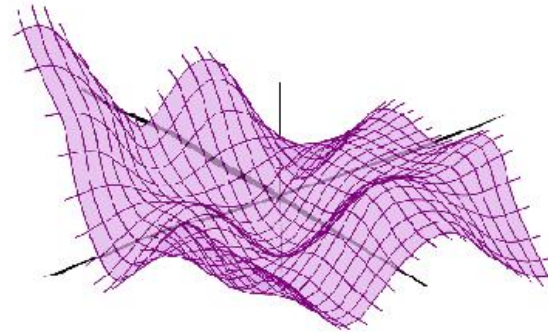
MODELE NUCLEARE



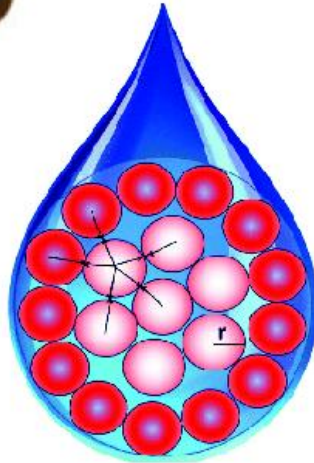
Nucleul atomic



Modelul în pături



Modelul statistic



Modelul picătură de lichid



Modelul colectiv

Modele nucleare

- **Modele nucleare** - formulări calitative ale unor ipoteze simplificatoare asupra mișcării și distribuției nucleonilor în nucleu și care permit calcularea caracteristicilor sistemului nuclear pentru o situație dată.
- **Modalități de clasificare a modelelor nucleare:**

A. După mărimea interacțiunii nucleonice

- **Modele collective** (*cuplaj de intensitate mare*) – descriu proprietățile nucleului prin mișcările colective ale nucleonilor
- **Modele uniparticulă** (*modelul particulei independente*) – descriu proprietățile nucleului prin mișcările individuale ale nucleonilor într-un potențial creat de toți nucleonii din nucleu
- **Modele unificate** (*colective*) – se iau în considerare atât proprietățile individuale cât și proprietățile colective ale nucleului.

B. După modul cum este descrisă interacțiunea dintre nucleoni

- **Modele fenomenologice** – se folosește un potențial mediu al nucleului, iar parametrii specifici sunt determinați din măsurători experimentale
- **Modelele microscopice** – se pleacă de la un potențial nucleonic (fenomenologic sau microscopic) și se calculează interacțiunea nucleonilor din nucleu
- **Modele semimicroscopice** - interacțiunea dintre nucleoni este separată în două părți: potențialul mediu al nucleului și interacțiunea nucleonică reziduală.

A. Modele nucleare caracterizate de mărimea interacțiunii nucleonice

- **Modelul particulei independente** (*nucleoni se află în stări discrete de energie*) consideră că în nucleu, un nucleon se mișcă aproximativ independent într-un câmp nuclear mediu, comun, creat de ceilalți nucleoni (*câmp selfconsistent* sau *câmp rezidual*). Interacțiunile dintre nucleoni sunt presupuse slabe și prin urmare fiecare nucleon se găsește într-o stare cuantică bine precizată.
 - Din aceasta categorie fac parte:
 - modelul gazului degenerat (**Fermi**)
 - modelul în pături.

- **Modelul colectiv** (*nucleoni fără stări de energie independente*), presupune că nucleonii interacționează puternic unii cu alții în interiorul volumului nuclear astfel că starea nucleului este determinată de contribuția colectivă a tuturor nucleonilor constituenți.
 - Din aceasta categorie fac parte:
 - modelul picăturii de lichid
 - modelul Bohr-Mottleson

□ Modelul gazului degenerat (Fermi)

- Conceptul de *gaz Fermi* poate fi aplicat sistemelor de fermioni care interacționează slab (*particule care se supun statisticii Fermi-Dirac și respectă principiul de excluziune a lui Pauli*)

$$n_i = \frac{g_i}{e^{(\varepsilon_i - E_F)kT} + 1}$$

n_i – este numărul de particule în starea de energie ε_i ,

g_i – este gradul de degenerare al stării (densitatea de stări),

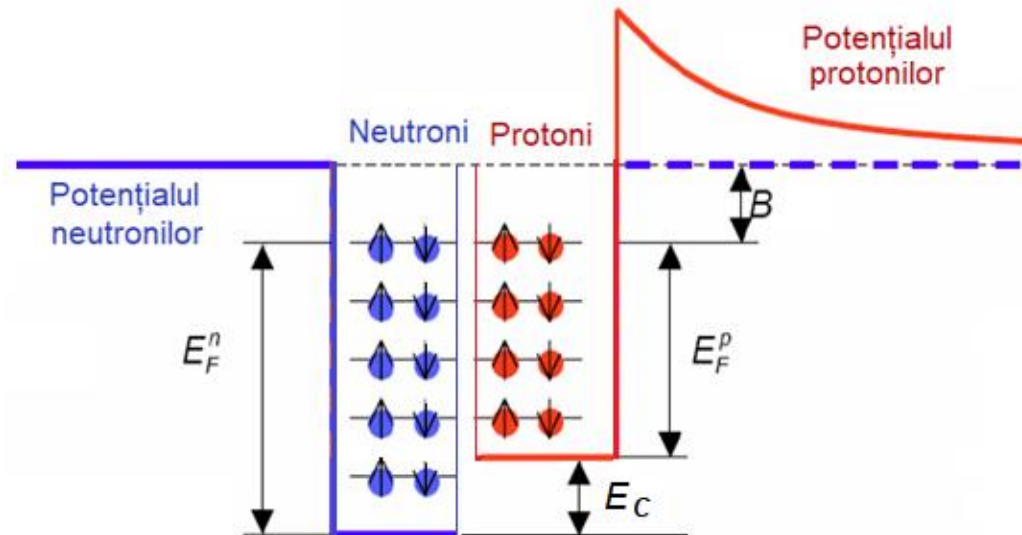
E_F – este energia nivelului Fermi (valoarea maximă a energiei pe care o poate lua un sistem de fermioni, la temperatura de zero absolut).

k – constanta Boltzmann

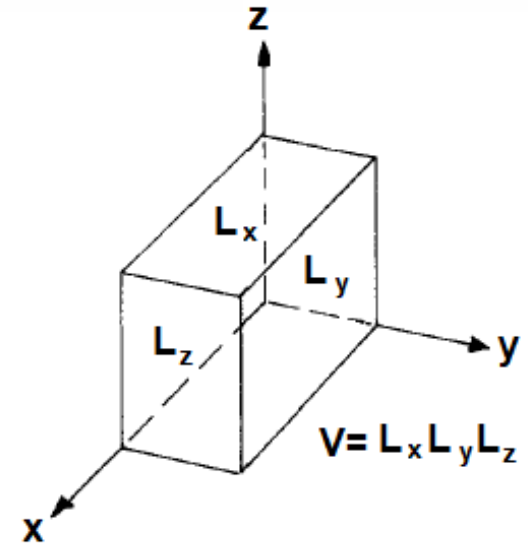
T – temperatura

✓ Se poate determina statistic distribuția energetică a fermionilor într-un gaz Fermi aflat în echilibru termic, caracterizat prin densitate numerică, temperatură și setul de stări energetice disponibile.

- Modelul presupune că nucleul poate fi considerat ca un gaz de protoni și neutroni confinat într-un spațiu restrâns, egal cu volumul nucleului (gaz degenerat Fermi).
- Potențialul este generat de toți nucleonii, însă forma gropii de potențial este diferită pentru neutroni și protoni.



- Considerăm un sistem de particule confinate într-o groapă de potențial rectangulară cu pereți rigizi (de dimensiuni L_x , L_y și L_z), și care ocupă stări determinate de numerele cuantice n_x , n_y și n_z



- Impulsul corespunzător fiecărei stări \mathbf{p}_x , \mathbf{p}_y și \mathbf{p}_z sau numerele lor de undă \mathbf{k}_x , \mathbf{k}_y și \mathbf{k}_z încorporează explicit dimensiunea tridimensională a gropii de potențial ($\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$)

$$k_i = n_i \frac{\pi}{L_i}, \quad i = x, y, z$$

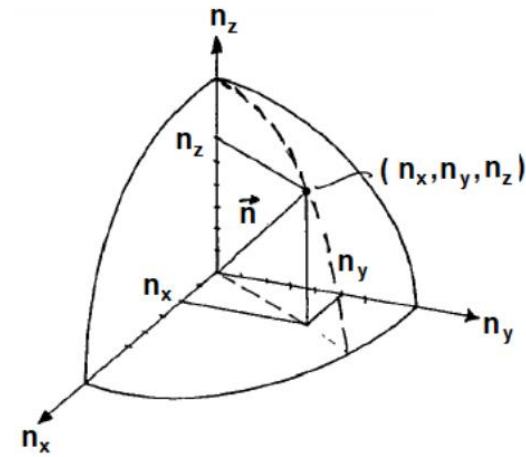
- Problema se reduce, așadar, la găsirea valorii celei mai mari a numărului cuantic $\mathbf{n} = \mathbf{n}_F$ sau a impulsului $\mathbf{p} = \mathbf{p}_F$ corespunzător *nivelului Fermi*.
- Numărul de undă a nivelului Fermi poate fi scris ca:

$$k_F^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

iar în termeni de numere cuantice: $k_F^2 \frac{L^2}{\pi^2} = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$

- Starea spațială a funcției de undă este descrisă de fiecare combinație de numere cuantice pozitive n_x, n_y, n_z .
- Fiecare combinație corespunde unei “*celule unitare*” (cu volumul 1) a spațiului “ n ”.
- Simplificând la un volum cubic $V = L_x L_y L_z = L^3$, energia este:

$$E(n_x, n_y, n_z) = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = \frac{\hbar^2 \pi^2 \mathbf{n}^2}{2mL^2}$$



- O bună aproximație este ca numărul combinațiilor de numere cuantice întregi și pozitive care satisface această relație, să fie dat de 1/8 dintr-o sferă cu raza egală cu $r = k_F \frac{L}{\pi}$

$$N_{\text{stari}} = \left(\frac{1}{8} \right) \frac{4}{3} \pi \left(k_F \frac{L}{\pi} \right)^3$$

- ✓ numărul de undă corespunzător nivelului Fermi ($T=0$) pentru protoni și neutroni pentru o groapă de potențial egală cu raza nucleului, $\mathbf{r} = L = r_0 A^{1/3}$:

$$k_F^{\text{protoni}} = \frac{\pi}{L} \left(\frac{2 N_{\text{stari}}}{3 \pi} \right)^{1/3} = \frac{\pi}{L} \left(\frac{2 Z}{3 \pi} \right)^{1/3} = \frac{\pi}{r_0} \left(\frac{2 Z}{3 \pi A} \right)^{1/3}$$

$$k_F^{\text{neutroni}} = \frac{\pi}{L} \left(\frac{2 N_{\text{stari}}}{3 \pi} \right)^{1/3} = \frac{\pi}{L} \left(\frac{2 (A - Z)}{3 \pi} \right)^{1/3} = \frac{\pi}{r_0} \left(\frac{2 (A - Z)}{3 \pi A} \right)^{1/3}$$

➤ Evaluarea valorii energiei Fermi:

- numărul de protoni și neutroni este aproximativ egal - **nucleele stabile**

$$\frac{Z}{A} \cong \frac{A-Z}{A} = \frac{1}{2}$$

$$r_0 = 1.2 \times 10^{-13} \text{ cm} = 1.2 \text{ fm}$$

$$m = 938 \text{ MeV}$$

$$E_F = \frac{k_F^2 \hbar^2}{2m} = \frac{p_F^2}{2m} \approx 32 \text{ MeV}$$

$$p_F = \sqrt{2mE_F} \cong 245 \text{ MeV} / c$$

(nucleonii se mișcă aproape liber în nucleu și au impuls mare!)

- numărul de neutroni este mai mare decât numărul de protoni – nucleee grele se poate evalua cu relația aproximativă

$$E_F^{\text{protoni}} = 53 \left(\frac{Z}{A} \right)^{2/3} \text{ MeV}$$

$$E_F^{\text{neutroni}} = 53 \left(\frac{A-Z}{A} \right)^{2/3} \text{ MeV}$$

Considerente:

- În starea fundamentală, nivelele situate între energia nivelului Fermi și energia potențială de zero (B) sunt presupuse complet libere.
- Când nucleul **absoarbe energie**, nucleonii trec de pe nivelele ocupate (situate sub nivelul Fermi) pe nivelele libere situate între nivelul Fermi și nivelul de zero.
- **Fiecare tranziție** conduce la o energie de excitare specifică și la combinații de excitări multiple care pot conduce la aceleași energie sau la o energie similară
- Numărul mare de nivele ale sistemului poate fi descris de o densitate medie a nivelului de excitare $\rho(E^*, N)$ care este dat de **numărul de nivele per unitatea de energie de excitare E^*** pentru un număr de nucleoni **N** determinat.

- Legătura dintre descrierea microscopică dată de stările individuale ale sistemului și comportarea termodinamică (*dată de distribuția Boltzmann din mecanica statistică*) se poate exprima prin entropia $S(E, N)$ a sistemului, care este proporțională cu logaritmul natural al numărului de nivele disponibile din sistem (*multiplicitatea stărilor*):

$$S(E, N) = k_B \ln \Gamma(E, N) = k_B \ln \left(\frac{\rho(E, N)}{\Delta E} \right)$$

$\Gamma(E, N)$ - *numărul total de nivele corespunzător unei anumite energii și unui anumit număr de nucleoni*

- Entropia unui nucleu excitat este proporțională cu densitatea de nivele dintr-un anumit interval energetic ΔE și va tinde la zero când energia de excitare tinde la zero
- Temperatura termodinamică nucleară ($\sim 10^9$ K) se poate exprima prin:

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S(E^*, N)}{\partial E} = k_B \frac{\partial \ln \rho(E^*, N)}{\partial N}$$

- Situații de evaluare termodinamică a temperaturii pentru un volum constant:

- fixarea energiei și a numărului de particule – *ansamblu microcanonic* - $S_{microcanonic}$
- fixarea temperaturii și a numărului de particule – *ansamblu canonic* - $S_{canonic}$
- fixarea temperaturii și a potențialului - *ansamblu macrocanonic* - $S_{macrocanonic}$

**ansamblul microcanonic* - corespunde sistemelor de particule izolate ($E, V, N = \text{const.}$)

**ansamblul canonic* - corespunde sistemelor de particule aflate în contact termic cu un termostat ($T, V, N = \text{const.}$)

**ansamblul macrocanonic* - corespunde sistemelor termodinamice deschise, care schimbă masă și energie cu mediul exterior ($T, V, = \text{const.}$).

➤ Temperatura se scrie:

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S_{\text{microcanonic}}(E^*, N)}{\partial E}$$

✓ **Sisteme mici**

$$S_{\text{microcanonic}} = S_{\text{macrocanonic}} + \Delta S$$

✓ Energii de excitare joase E^* - entropia se scrie:

$$S_{\text{macrocanonic}}(E^*, N) = 2(a E^*)^{1/2}$$

✓ Variația entropiei ΔS pentru un gaz Fermi la energii de excitare joase

$$\Delta S \approx -\gamma \ln(E^*)$$

γ - este un număr cu valori cuprinse între 1 și 2, depinzând de izospinul și momentul cinetic a stării considerate

✓ Așadar, temperatura se scrie:

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S_{\text{macrocanonic}}(E^*, N)}{\partial E} + \frac{\partial \Delta S}{\partial E}$$



$$\frac{1}{T} \approx \left(\frac{a}{E^*}\right)^{1/2} - \left(\frac{\gamma}{E^*}\right)$$

(energii de excitare medii)

✓ Energii de excitare înalte: $E^* \cong a T^2$

✓ Densitatea de stări nucleare

$$\rho(E^*) \propto \frac{a}{(a E^*)^\gamma} \exp\left[2(a E^*)^{1/2}\right]$$

a - parametrul densității de nivelelor (proporțional cu numărul de nucleoni A
 $a \approx A/10 \text{ MeV}^{-1}$)

- În practică se folosesc două relații de legătură între temperatura nucleară și densitatea de nivele energetice din nucleu

- ▶ relația Lang și LeCouteur

$$\rho(E) = \frac{1}{12} \left(\frac{\pi^2}{a} \right)^{1/4} \frac{1}{(E + T)^{5/4}} \exp \left[2(aE)^{1/2} \right]$$

$$E = aT^2 - T; \quad a = \frac{A}{10}$$

- ▶ relația Ericson

$$\rho(E) = \frac{1}{12} \left(\frac{\pi^2}{a} \right)^{1/4} \frac{1}{(E)^{5/4}} \exp \left[2(aE)^{1/2} \right]$$

$$E = aT^2; \quad a = \frac{A}{10}$$

- Probabilitatea relativă $P(\epsilon, n)$ pentru ca un nucleu excitat să emită un nucleon sau un fragment de nucleu n de energie ϵ este proporțională cu numărul de stări din vecinătatea energiei E a unui nucleu conținând N nucleoni, adică $\Gamma(E, N)$

$$P(\epsilon, n) \propto \Gamma(\epsilon, n) \cdot \Gamma(E - \epsilon, N - n)$$

$\Gamma(\epsilon, n)$ - contribuția particulei sau a fragmentului emis
 $\Gamma(E - \epsilon, N - n)$ - contribuția nucleului rezidual

Γ_i - reprezintă lărgimile liniilor spectrului de dezintegrare corespunzător unei anumite tranziții

- Tranziția din stare excitată în stare fundamentală este un proces statistic și se poate realiza prin mai multe moduri, fiecare modalitate de tranziție poartă nume de *canal de dezintegrare* și este caracterizat de o secțiune eficace σ_i . Suma tuturor secțiunilor eficace reprezintă secțiunea totală σ_T

$$\frac{\sigma_i}{\sigma_T} = \frac{\Gamma_i}{\Gamma_T}$$

□ Modelul în pături

➤ Observații experimentale

- ✓ structura fină din spectrele radiațiilor emise de nuclee în dezintegrarea radioactivă
- ✓ discontinuități din vecinătatea unor nuclee cu numere de nucleoni bine determinate (numere magice: 2, 8, 20, 50, 82, 126 și 184) similar structurii atomice cu pături complet ocupate - stabilitate maximă



- *Fiecare nucleon se mișcă pe orbite staționare într-un câmp nuclear produs de ceilalți A-1 nucleoni, de simetrie aproximativ centrală, fără a interacționa unii cu alții datorită tăriei și razei scurte de acțiune a forțelor nucleare (model particulă independentă)*

$$\sum_{i < j}^A V_{ij} = \sum_{i=1}^A V_i + \sum_{i < j}^A V_{ij}$$

interacțiune uni-particulă

interacțiune bi-particulă
(potențial rezidual)

- ✓ Nivelele energetice - rezolvarea ecuației Schrödinger pentru un sistem de A nucleoni

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \sum_{i=1}^A \nabla_i^2 \Psi(r_1, r_2, \dots, r_A) + \sum_{i < j}^A V_{ij} \cdot \Psi(r_1, r_2, \dots, r_A) = E \cdot \Psi(r_1, r_2, \dots, r_A)$$

$$\Psi(r_1, r_2, \dots, r_A) = \prod_{i=1}^A \Psi_i(r_i) \quad \text{antisimetrică}$$

➤ Potențialul nuclear

$$\left(\frac{dV}{dr}\right)_{r=0} = 0$$

- ✓ constant în centrul nucleului (densitatea materiei nucleare este aproximativ constantă în întreg volumul nuclear)

$$\left(\frac{dV}{dr}\right) > \left|\frac{V}{r}\right|_{r \rightarrow R}$$

- ✓ potențialul se anulează brusc la suprafața nucleului de rază R (*rază scurtă de acțiune a forțelor nucleare*).

▪ Tipuri de potențiale care îndeplinesc condițiile

▶ Potențial oscilator armonic tridimensional izotrop

$$E_{n,l} = [2(n-1) + 1] \hbar \cdot \omega_0 = n_0 \cdot \hbar \cdot \omega_0$$

- ✓ spectrul energetic - nivele echidistante și degenerate după numărul cuantic orbital l
 - numărul de nivele; $2n+1$, cu $n=0, 1, 2, \dots$
 - numărul de nucleoni pe fiecare orbital; $2(2n+1)=2, 6, 10, \dots$

Obs:

- numai o parte redau numerele magice corespunzătoare primelor trei straturi nucleonice, verificabile experimental
- potențial neadecvat pentru elementele grele

▶ Potențial - groapă dreptunghiulară cu pereți infiniți - elemente grele

- ✓ prin rezolvarea ecuației Schrödinger → valori ale energiei → schemă de nivele similară
 - nu mai apare degenerarea după numărul cuantic orbital
 - nivelele sunt deplasate spre valori mai mici ale energiei

► Potențial de tip Woods-Saxon

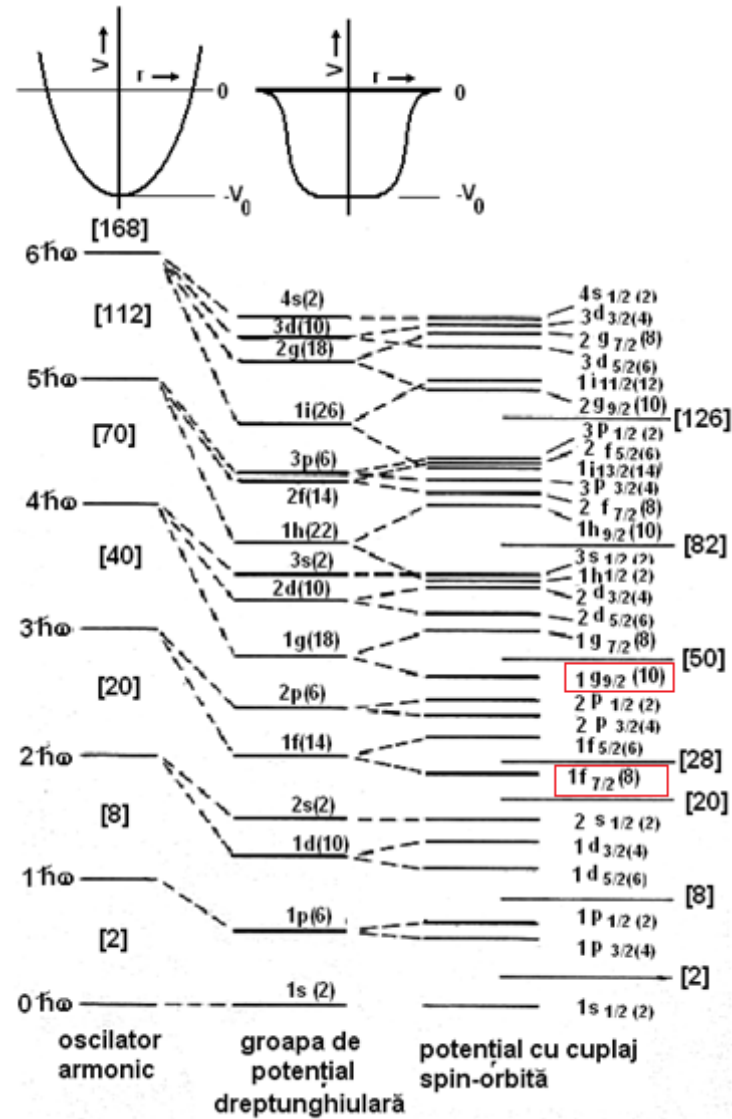
- ✓ formă intermediară între potențialul oscilatorului și groapa de potențial cu pereți înfiniți - ia în considerare și cuplajul puternic spin-orbită dintre nucleoni (cuplaj Mayer-Jensen)

$$V = V(r) - f(r) \cdot \vec{l} \cdot \vec{s} \quad \text{funcția radială } f(r) \text{ este pozitivă: } f(r) > 0$$

➤ Consecințe ale acestui tip de potențial

- ✓ Forțele nucleare – puternice ➡ *interacțiunea spin-orbită este mai puternică decât în cazul atomic;*
- ✓ Semnul funcției radiale este inversat față de cazul cuplajului atomic; *nivelul cu $j=l+s$ (l și s paralel) este mai coborât decât nivelul cu $j=l-s$ (l și s antiparalel).*
- ✓ Starea nucleonilor este caracterizată de trei numere cuantice n , l și j și formează o configurație de nucleoni
(*notația spectroscopică*; nlj de exemplu $2p_{3/2}$ în care $n=2$, $l=1$, $j=1+1/2=3/2$).
- ✓ Principiul lui Pauli, într-o stare cuantică se pot găsi maxim $2j+1$ protoni și $2j+1$ neutroni, deci maxim $2(2j+1)$ nucleoni; o configurație cu aceleași numere cuantice n , l și j (*configurație pură*) cu $2j+1$ nucleoni, formează un strat nucleonic complet.

Observații



► **Energia nivelelor nucleonice crește cu creșterea momentului cinetic orbital l.** (cu creșterea numărului cuantic orbital, energia forței centrifuge crește și energia de legătură a nucleonului scade.

► **Despicarea nivelelor energetice crește cu creșterea numărului cuantic j.** Cuplajul spin-orbită nu modifică semnificativ structura primelor trei nivele nucleonice (nivelele cu 2, 8 și 20 nucleoni). Structura fină a nucleului se manifestă semnificativ pentru straturile nucleonice superioare (nivelele cu 28, 50, 82, 126 și 184 nucleoni); pentru valori mari ale numărului cuantic principal n , nivelul cu $j=l_{\max}+1/2$ este deplasat spre stratul precedent ($n-1$).

Ex. 1: nivelul $1f_{7/2}(j=3+1/2=7/2)$ fiind foarte mult deplasat spre energii joase trece din stratul patru (format din termeni $1f$ și $2p$) în stratul trei care conține termeni $1d$ și $2s$ (strat considerat ca fiind un singur strat nucleonic complet la nucleele cu 28 nucleoni - număr magic).

Ex. 2: nivelului $1g_{9/2}(j=4+1/2=9/2)$ care trece din stratul al cincilea în stratul al patrulea unde împreună cu termenii $1f_{3/2}$, $2p_{3/2}$ și $2p_{1/2}$ pot cuprinde în plus 22 nucleoni conducând la o structură stabilă dată de numărul magic 50. În afară de explicarea numerelor magice, întretărierea nivelelor permite interpretarea fenomenului de izomerie nucleară.

► **Energia de despicare a nivelelor se micșorează la nucleele grele;** energia de despicare este dependentă de numărul de masă după o relație de tipul:

$$\Delta E_{1,s} \cong -12(2l+1) \cdot A^{-\frac{2}{3}} \text{ MeV}$$

► **Pentru nucleele cu număr de protoni $Z > 50$ repulsia coulombiană are o contribuție semnificativă asupra formei potențialului** și ca urmare succesiunea nivelelor energetice pentru neutroni și pentru protoni este diferită conducând la iregularități apreciabile.

□ Reguli de cuplaj spin-orbită (Mayer-Jensen)

➤ Regula I.

✓ Stările fundamentale ale **nucleelor par-pare** au spinul nuclear total zero și paritatea funcției de undă pozitivă. Întrucât aceste nuclee sunt de simetrie sferică, momentele magnetice și electrice sunt zero.

➤ Regula II.

✓ Pentru **nucleele par-impare** (număr de protoni Z par, număr de neutroni N impar), proprietățile stărilor fundamentale sunt determinate numai de configurațiile neutronice.

✓ Pentru **nucleele impar-pare** (număr de protoni Z impar, număr de neutroni N par), proprietățile stărilor fundamentale sunt determinate numai de configurațiile protonice. Toți izotopii cu Z impar dat și A impar au același spin nuclear.

➤ Regula III.

✓ Într-un nucleu cu **numărul de nucleoni impar** (A impar), nucleonii identici de număr impar își cuplează spinii în așa fel încât spinul nuclear total I este identic cu spinul nuclear total al ultimului nivel nuclear parțial ocupat, j .

- Dacă Z este par, cei Z protoni și $N-1$ neutroni formează un miez **par-par cu spinul total zero**. Ultimul neutron nepereche se mișcă pe un nivel cu momentul cinetic j în câmpul de simetrie sferică produs de miez. Spinul nuclear total I , și alte proprietăți nucleare sunt determinate numai de mișcarea acestui neutron.
- Același proces are loc și în cazul unui nucleu cu Z impar și N par, însă caracteristicile sunt date de protonul nepereche.

□ Analiza structurii în pături a nucleului

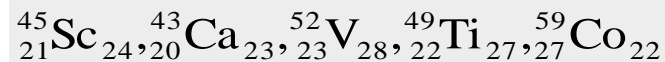
- **Stratul I** - nivel unic care poate fi ocupat de doi nucleoni identici;
 - ✓ doi neutroni și doi protoni -nucleul de heliu ${}^4_2\text{He}$ cu spinii antiparaleli (spin zero)
 - ✓ doi protoni și un neutron ${}^3_2\text{He}$ sau doi neutroni și un proton ${}^3_1\text{H}$ au spinul 1/2
- **Stratul II** - nivelele $1p_{3/2}$ și $1p_{1/2}$ și conțin 6 nucleoni; 4 pe nivelul $p_{3/2}$ și 2 pe nivelul $1p_{1/2}$. Această configurație trebuie să aibă spinul 3/2 dacă nucleonul neîmperecheat se află pe nivelul $1p_{3/2}$ (${}^7_3\text{Li}_4$, ${}^{11}_5\text{B}_6$, ${}^9_4\text{Be}_5$) și 1/2 dacă se află pe nivelul $1p_{1/2}$ (${}^{15}_7\text{N}_8$, ${}^{13}_6\text{C}_7$)
- **Stratul III** cuprinde nivelele $1d_{5/2}$, $1d_{3/2}$ și $2s_{1/2}$ cu un număr maxim de 12 nucleoni dispuși astfel: 6 pe $1d_{5/2}$, 4 pe $1d_{3/2}$ și 2 pe $2s_{1/2}$.
 - ✓ Nucleele impare din acest strat au spinul:

$$5/2 \left({}^{17}_8\text{O}_9, {}^{17}_9\text{F}_8 \right)$$

$$3/2 \left({}^{35}_{17}\text{Cl}_{18,17}, {}^{37}_{17}\text{Cl}_{20,19}, {}^{39}_{19}\text{K}_{20,19}, {}^{41}_{19}\text{K}_{22,16}, {}^{33}_{16}\text{S}_{17,16}, {}^{35}_{16}\text{S}_{19} \right)$$

$$1/2 \left({}^{31}_{15}\text{P}_{16,14}, {}^{29}_{14}\text{Si}_{15} \right)$$

- **Stratul IV** cuprinde nivelul $1f_{7/2}$ care poate fi ocupat de maximum 8 nucleoni și explică numărul magic 28. Nucleele care aparțin acestui strat au în stare fundamentală spinul 7/2



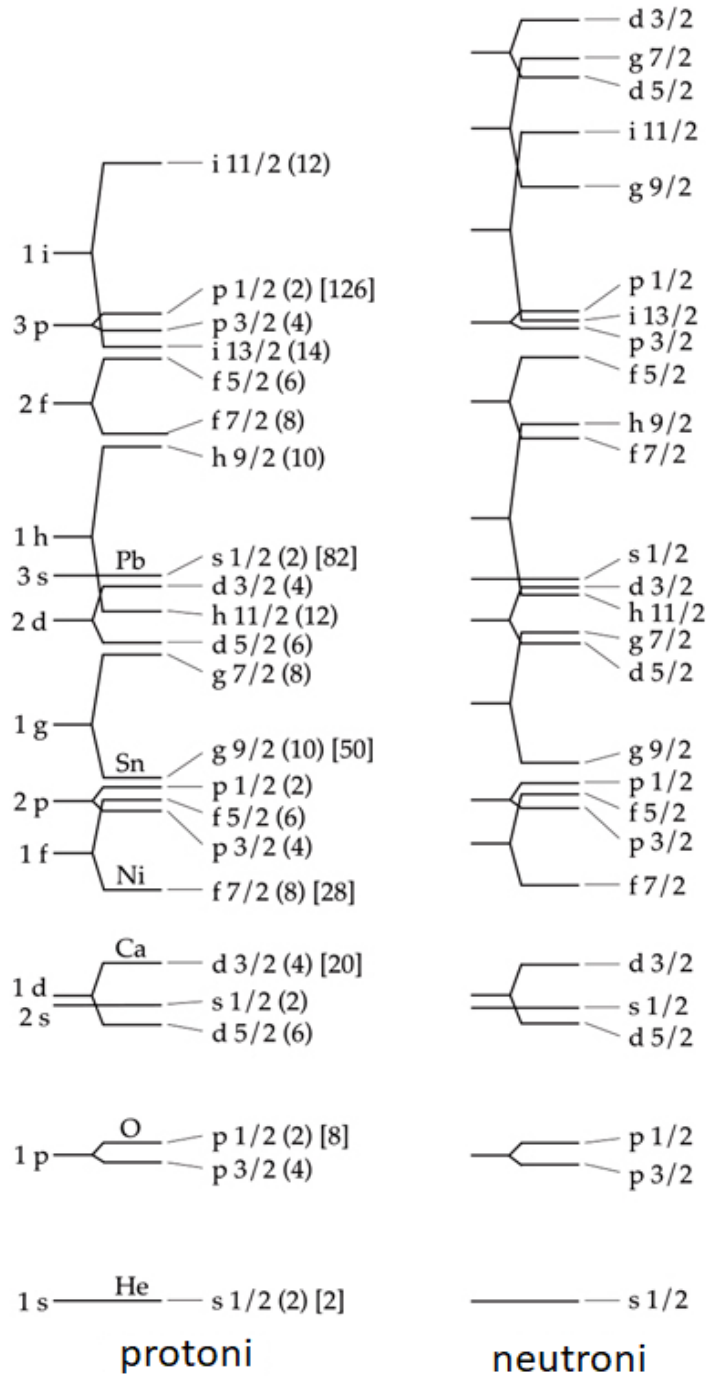
- ✓ **Excepții** - nucleele care conțin cinci neutroni sau cinci protoni în stratul $1f_{7/2}$ care au spinul 5/2 ca urmare a cuplajului anomal (${}^{47}_{22}\text{Ti}_{25,25}$, ${}^{55}_{25}\text{Mn}_{30}$)

- **Stratul V** - nivelele $1f_{5/2}$, $2p_{3/2}$, $2p_{1/2}$ și $1g_{9/2}$ cuprinzând un număr maxim de 22 nucleoni identici. Primul nivel care se completează este $1f_{5/2}$ și conține maxim 6 nucleoni iar spinul nucleelor este $5/2$. Urmează nivelul $2p_{3/2}$ care conține 4 nucleoni identici, spinul nuclear este $3/2$ (${}^{63}_{29}\text{Cu}$, ${}^{65}_{34,29}\text{Cu}$, ${}^{69}_{36,31}\text{Ga}$, ${}^{71}_{38,31}\text{Ga}$, ${}^{53}_{40,24}\text{Cr}$, ${}^{57}_{29,26}\text{Fe}$, ${}^{31}_{31}\text{Fe}$).
- ✓ Nivelele următoare - $2p_{1/2}$ și $1g_{9/2}$ - foarte apropiate între ele și conțin 2 respectiv 10 nucleoni identici

- **Stratul VI** - nivelele $1g_{7/2}$, $2d_{5/2}$, $2d_{3/2}$, $1h_{11/2}$ și $3s_{1/2}$ și conține 32 nucleoni care prin ocupare completă formează numărul magic **82**. Primii 14 nucleoni completează nivelele $1g_{7/2}$ (8 nucleoni) și $2d_{5/2}$ (6 nucleoni) cu ordine de completare dependentă de anumiți factori printre care numărul de protoni sau neutroni din nucleu. Următorii 18 nucleoni, completează nivelele $2d_{3/2}$ (4 nucleoni), $1h_{11/2}$ (12 nucleoni) și $3s_{1/2}$ (2 nucleoni). Nucleele impare din acest nivel au spinii nucleari $7/2$, $5/2$, $3/2$, $11/2$ și $1/2$.

Obs. Datele experimentale confirmă valorile tuturor spinilor nucleari cu excepția valorii $11/2$ pentru care nu există nici nucleu în stare fundamentală. Din acest motiv se presupune că nivelul $1h_{11/2}$ se completează prin perechi de nucleoni.

- **Stratul VII** - nivelele $1h_{9/2}$ (10 nucleoni), $2f_{7/2}$ (8 nucleoni), $3p_{3/2}$ (4 nucleoni), $1i_{13/2}$ (14 nucleoni), $2f_{5/2}$ (6 nucleoni) și $3p_{1/2}$ (2 nucleoni) care pot fi ocupate de maximum 44 nucleoni conducând la formarea numărului magic **126**. Există numai 7 nuclee impare cu $Z > 82$ pentru care se cunosc valorile experimentale ale spinului nuclear. Deasemeni în acest strat există abateri de la modelul Mayer-Jensen, abateri care se datoresc în bună măsură deformării nucleelor grele.



protoni

neutroni

□ Modelul picăturii de lichid

- Are la bază pe caracterul saturat al forțelor nucleare astfel că este posibilă analogia dintre nucleu și o picătură de lichid incompresibil.
- Nucleul are densitate constantă
- Din experimentele de împrăștiere nucleon-nucleon se știe că:
 - ✓ forțele nucleare sunt puternic repulsive la distanțe scurte
 - ✓ forțele nucleare atractive la distanțe intermediare
 - ✓ forțele nucleare neglijabile la distanțe mari
- Datorită proprietății de independență de sarcină a forțelor nucleare, neutronii și protonii interacționează cu aceiași tărie
- Nucleonii de la suprafață sunt atrași spre interiorul nucleului - forțe de tensiune superficială -picătura capătă forma unei sfere cu volum proporțional cu numărul de nucleoni
- Corecțiile datorate interacțiunii coulombiene pot fi făcute folosind teoria electromagnetismului
- Nucleonii sunt fermioni ($S=1/2$) și ca urmare la $T=0$ ocupă toate nivelele energetice sub o anumită valoare (nivel Fermi)
- Forțele nucleare nu depend de izospin

$$B_{\text{tot}}(A, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_a \frac{(A - 2Z)^2}{A} \pm \delta$$

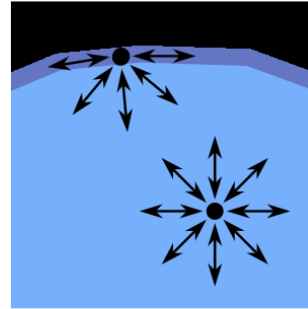
a_v, a_s, a_c, a_a - parametri semiempirici

➤ Termenul de volum și de suprafață

$B_{\text{volum}} = + a_v A$ - contribuția tuturor nucleonilor din volumul nucleului

$B_{\text{suprafata}} = - a_s A^{2/3}$ - nu toți nucleonii au vecinătăți complete

aria πR^2 iar $R = R_0 A^{1/3}$ $\Rightarrow \propto \pi R^2 = \pi R_0^2 A^{2/3} = a_s A^{2/3}$



➤ Termenul Coulombian

✓ Nucleul este încărcat electric cu sarcina totală Ze

✓ Sarcina este distribuită omogen într-un volum sferic egal cu volumul nucleului,

$$E_{\text{coulomb}} = \int_0^R \frac{Q(r)}{r} dQ \quad Q(r) = Ze \left(\frac{r}{R}\right)^3 \quad dQ = 3Ze \frac{r^2}{R^3} dr$$

$$E_{\text{coulomb}} = \int_0^R \frac{3(Ze)^2 r^5}{r R^6} dr = \left(\frac{3}{5}\right) \frac{(Ze)^2}{R} \Rightarrow B_{\text{coulomb}} = - \left(\frac{3}{5}\right) \frac{Z^2}{R_0 A^{1/3}} = -ac \frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

✓ O formulă mai corectă este cea în care nu se ia în considerare interacțiunea protonului cu el însuși

$$\Rightarrow B_{\text{coulomb}} = - \left(\frac{3}{5}\right) \frac{Z'(Z-1)}{R_0 A^{1/3}} = -ac \frac{Z'(Z-1)}{A^{1/3}}$$

➤ Termenul de asimetrie

- ✓ Neutronii și protonii sunt fermioni (spin $1/2$) și trebuie să respecte principiul de excluziune Pauli
- ✓ Dacă toți factorii ar fi în stare fundamentală, numărul de protoni ar trebui să fie egal cu numărul de neutroni.
- ✓ Nucleele stabile ușoare sunt caracterizate prin faptul că $N \cong Z$ și $A \cong 2Z$. Abaterea de la egalitatea $A = 2Z$ duce la micșorarea energiei de legătură.

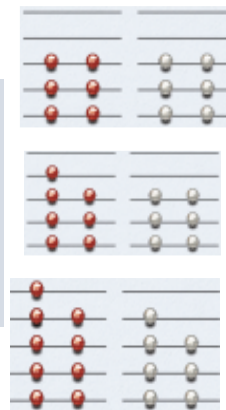
$$\frac{(A - 2Z)^2}{A} = \frac{(N - Z)^2}{A} \quad - \text{cu cât asimetria relativă dintre numărul de neutroni și protoni crește față de numărul total de nucleoni, energia de legatură scade}$$

$$E_{\text{asimetrie}} \sim \frac{(N - Z)^2}{A} \rightarrow E_{\text{asimetrie}} = a_a \frac{(N - Z)^2}{A}$$

➤ Termenul de împerechere

- ✓ δ - termen de împerechere - consideră cuplajul spinilor nucleonilor în nucleu pentru un anumit nivel energetic în conformitate cu principiul lui Pauli

$$\delta(A, Z) = \begin{cases} a_p A^{-1/3} & \text{pentru nuclee par - pare} \\ 0 & \text{par - impare sau impar - pare} \\ -a_p A^{-1/3} & \text{pentru nuclee impar - impare} \end{cases}$$



□ Modelul colectiv

Aage Bohr, James Rainwater, Ben Roy Mottelson – premiul Nobel 1975

- Corelarea modelului picăturii de lichid (*model colectiv*) cu modelul în pături (*modelul particulei independente*)
- Multe proprietăți ale nucleelor grele pot fi descrise de mișcările suprafeței unei picături de lichid
- Miezul nucleului este structurat în pături
- Fără nucleonii de “valență” exteriori, nucleonii se comportă ca moleculele de la suprafața unei picături de lichid. Nucleoni de “valență” induc perturbații non-sferice ale stărilor cuantice
- Nucleul se rotește și vibrează.

▶ Energia de rotație

$$E_J = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1) \quad J = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

I – moment de inerție

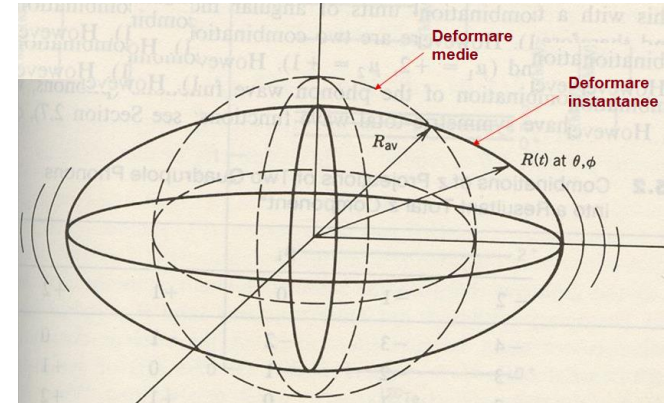
▶ Energia de vibrație – nivele distanțate cu $\Delta E = \hbar\omega$

- ✓ Un punct de pe suprafața nucleului poate fi descris prin armonice sferice:

$$R(t) = R_{avr} + \sum_{\lambda} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda\mu}(t) Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi)$$

$$\alpha_{\lambda\mu} = \alpha_{\lambda,-\mu}$$

$$E_N = \left(N + \frac{5}{2}\right) \hbar\omega$$



Armonice sferice

$$Y_{\ell,m}(\theta, \phi) = \left[\frac{(2\ell + 1)(\ell - |m|)!}{4\pi(\ell + |m|)!} \right]^{1/2} P_{\ell,|m|}(\cos \theta) e^{im\phi}$$

Polinoamele Legendre - $P_{\ell,|m|}(\cos \theta)$

$$P_{0,0}(\cos \theta) = 1$$

$$P_{3,0}(\cos \theta) = \frac{1}{2}(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$$

$$P_{1,0}(\cos \theta) = \cos \theta$$

$$P_{3,1}(\cos \theta) = \frac{3}{2}(5 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta$$

$$P_{1,1}(\cos \theta) = \sin \theta$$

$$P_{3,2}(\cos \theta) = 15 \cos \theta \sin^2 \theta$$

$$P_{2,0}(\cos \theta) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1) \quad P_{3,3}(\theta) = 15 \sin^3 \theta$$

$$P_{2,1}(\cos \theta) = 3 \cos \theta \sin \theta$$

$$P_{2,2}(\cos \theta) = 3 \sin^2 \theta.$$

Simbol	Coordonate Polare	Coordonate Carteziene	Constanta de normare
Y_{00}	1	1	$\frac{1}{2}(1/\pi)^{1/2}$
Y_{10}	$\cos \theta$	z/r	$\frac{1}{2}(3/\pi)^{1/2}$
$Y_{1\pm 1}$	$\mp(\sin \theta)e^{\pm i\phi}$	$\mp(x \pm iy)/r$	$\frac{1}{2}(3/2\pi)^{1/2}$
Y_{20}	$(3 \cos^2 \theta - 1)$	$(3z^2 - r^2)/r^2$	$\frac{1}{4}(5/\pi)^{1/2}$
$Y_{2\pm 1}$	$\mp(\sin \theta)(\cos \theta)e^{\pm i\phi}$	$\mp z(x \pm iy)/r^2$	$\frac{1}{2}(15/2\pi)^{1/2}$
$Y_{2\pm 2}$	$(\sin^2 \theta)e^{\pm 2i\phi}$	$(x \pm iy)^2/r^2$	$\frac{1}{4}(15/2\pi)^{1/2}$
Y_{30}	$(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$	$z(5z^2 - 3r^2)/r^3$	$\frac{1}{4}(7/\pi)^{1/2}$
$Y_{3\pm 1}$	$\mp \sin \theta(5 \cos^2 \theta - 1)e^{\pm i\phi}$	$\mp(x \pm iy)(5z^2 - r^2)/r^3$	$\frac{1}{8}(21/\pi)^{1/2}$
$Y_{3\pm 2}$	$(\sin^2 \theta)(\cos \theta)e^{\pm 2i\phi}$	$z(x \pm iy)^2/r^3$	$\frac{1}{4}(105/2\pi)^{1/2}$
$Y_{3\pm 3}$	$\mp(\sin^3 \theta)e^{\pm 3i\phi}$	$\mp(x \pm iy)^3/r^3$	$\frac{1}{8}(35/\pi)^{1/2}$

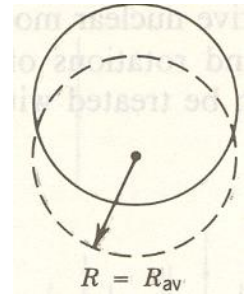
► $\lambda=0$, vibrație monopolară – modul “breathing” ca un fluid compresibil

$$R(t) = R_{avr} + \alpha_{00} Y_{00}$$



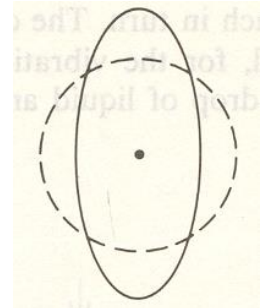
► $\lambda=1$, vibrație dipolară

$$R(t) = R_{avr} + \sum_{\mu=-1}^1 \alpha_{1\mu} Y_{1\mu}(\theta, \varphi) = R_{avr} + \alpha_{10} \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2\pi} \right)^{3/2} \cos\theta$$



► $\lambda=2$, vibrație cuadrupolară

$$R(t) = R_{avr} + \sum_{\mu=-1}^1 \alpha_{2\mu} Y_{2\mu}(\theta, \varphi) = R_{avr} + \alpha_{20} \frac{1}{4} \left(\frac{5}{\pi} \right)^{1/2} (3\cos^2\theta - 1)$$



► $\lambda \geq 3$ vibrații

