## 1.MĂSUREA MOMENTULUI DE INERȚIE, VERIFICAREA TEOREMEI LUI STEINER.

### Introducere teoretică

Momentul de inerție este o mărime fizică ce caracterizează distribuția masei în jurul unei axe. Pentru o masă *m*, punctiformă, aflată la distanța *r* față de axă, momentul de inerție $I$ este $I = mr^2$. Momentul de inerție este o mărime aditivă, adică, dacă avem un sistem de puncte materiale atunci $I = \sum_k m_k r_k^2$ . Dacă este vorba de un corp continuu, $I = \int_V r^2 dm$ unde integrala se face pe întreg volumul *V* al corpului, *d*m este un element de masă iar *r* este distanța de la elementul de masă la axa de rotație. Se poate demonstra că, momentul de inerție $I$ față de o axă oarecare este egal cu momentul de inerție $I_0$ față de o axă, paralelă cu prima, care trece prin centrul de masă al corpului plus produsul dintre masa corpului, *m*, şi pătratul distanței dintre cele două axe, $d^2$:

$I = I_0 + md^2$ (teorema lui Steiner). Măsurarea momentului de inerție față de o axă şi verificarea teoremei lui Steiner este scopul acestei prime părți a lucrării. Verificarea teoremei lui Steiner se va efectua folosind două corpuri cilindrice care inițial se vor pune în oscilație în jurul unei axe care trece prin centrul lor de masă iar apoi față de o axă aflată la o distanță *d* față de centrul lor de masă.

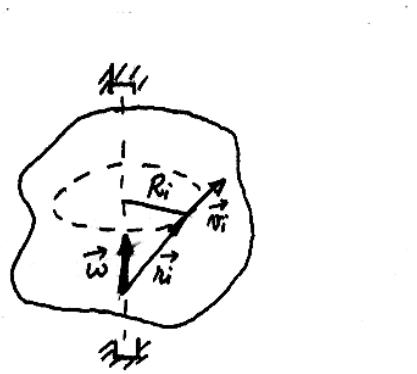


*Figura 1*

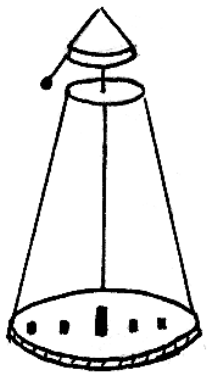


*Figura 2*

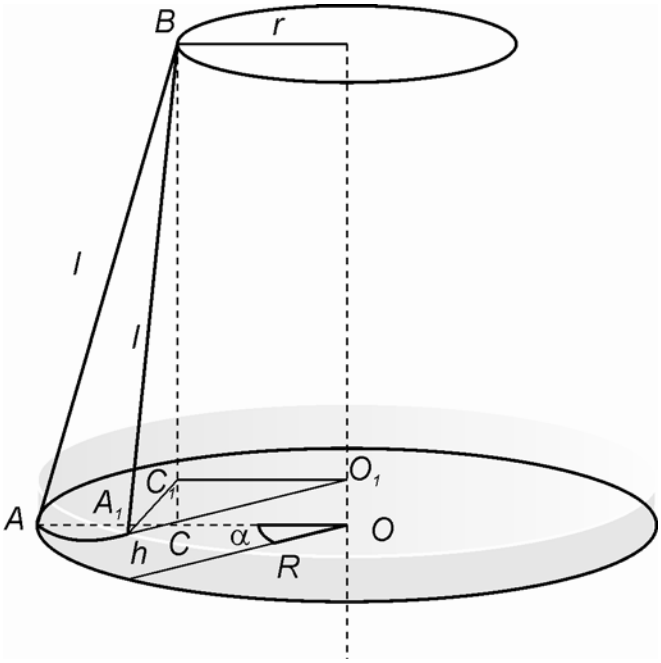
Una din metodele experimentale de măsurare a momentului de inerție față de o axă este cea care foloseşte suspensia trifilară.

### Aparatura şi procedeul experimental

Metoda suspensiei trifilare: o platformă circulară de masă $m_0$ **= 254 g** şi rază *R* este suspendată de trei fire de lungime *l* dispuse simetric şi fixate la periferia platformei (Figura 2). Firele sunt fixate în partea superioară de un disc de rază mică, *r*, fix, care prin

intermediul unei pârghii serveşte şi la imprimarea mişcării platformei. Firele nu sunt legate direct de discul superior, ci prin intermediul unor şuruburi ce permit variația fină a lungimii firelor, în scopul stabilirii orizontalității platformei. Axul discului superior se sprijină pe un suport fixat pe perete.

Dacă punem în mişcare platforma, printr-o mică deplasare unghiulară cu un unghi $\alpha_0$, aceasta va avea o mişcare oscilatorie. În această mişcare, platforma se roteşte de-o parte şi de alta a poziției de echilibru, şi în acelaşi timp se ridică şi coboară cu înălțimea *h*. Energia potențială a platformei în punctul de înălțime maximă (energie cinetică nulă): $m_0gh$, se transformă în energie cinetică, când platforma trece prin poziția de echilibru: $\frac{I_0\omega^2}{2}$, unde $I_0$ este momentul de inerție față de axa de rotație (indicele zero este pentru că axa de rotație trece prin centrul de masă al sistemului) iar $\omega$ este viteza unghiulară a corpului când trece prin poziția de echilibru.




Dacă $\alpha$ este deplasarea unghiulară (mică) se poate arăta[1] că înălțimea la care se ridică platforma este $h = \frac{Rr\alpha^2}{2l}$ iar energia potențială este $U = m_0g\frac{Rr\alpha^2}{2l} = \frac{m_0gRr}{l}\frac{\alpha^2}{2}$. Energia cinetică se scrie: $E_c = \frac{I_0\omega^2}{2} = \frac{I_0\dot{\alpha}^2}{2}$.

[1] Înălțimea h se poate calcula din $h = BC - BC_1$.
$BC^2 = AB^2 - AC^2 = l^2 - (R-r)^2$ . $BC_1^2 = A_1B^2 - A_1C_1^2 = l^2 - A_1C_1^2$ .
$A_1C_1$ îl obținem din $\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{O_1C_1} - \overrightarrow{O_1A_1}$, adică $A_1C_1^2 = O_1C_1^2 + O_1A_1^2 - 2O_1C_1 \cdot O_1A_1 \cdot \cos\alpha$
$A_1C_1^2 = r^2 + R^2 - 2rR \cdot \cos\alpha$. $BC_1^2 = l^2 - r^2 - R^2 + 2rR\cos\alpha$. $h = \frac{BC^2 - BC_1^2}{BC + BC_1} = \frac{2rR(1-\cos\alpha)}{BC + BC_1}$ adică
$h = \frac{4rR\sin^2\alpha/2}{BC + BC_1}$. Dacă unghiul a este mic, $\sin\alpha \cong \alpha$. Dacă *l* este mult mai mare decât diferența $(R-r)$,
atunci $BC + BC_1 \cong 2l$ iar $h = \frac{Rr\alpha^2}{2l}$ QED.

Ştim că, dacă energiile cinetică şi potențială a unui corp depind de coordonata $q$ după legile: $E_c = \frac{A\dot{q}^2}{2}$ şi $U = \frac{Bq^2}{2}$, mişcarea corpului este una oscilatorie, cu $T = 2\pi\sqrt{\frac{A}{B}}$.

În cazul nostru, mişcarea oscilatorie va avea perioada: $T = 2\pi\sqrt{\frac{lI_0}{m_0 grR}}$.

**Măsurând perioada unui astfel de pendul, putem calcula momentul de inerție al corpului care se roteşte, în cazul nostru momentul de inerție al platformei:**

$I_0 = \frac{m_0 grR}{4\pi^2 l}T^2$.

Razele platformei $R$ şi a discului superior $r$ se măsoară cu şublerul, masa $m_c$ a unui corp se obține prin cântărire cu balanța (**$m_c$ = 576 g**) iar lungimea $l$ a firelor de suspensie se măsoară cu o riglă. Perioada de oscilație se măsoară cu un cronometru: se măsoară timpul în care au loc 20 de oscilații, şi se repetă măsurătoarea de trei ori.

**!** Se vor imprima platformei oscilații de amplitudine mică.

*Modul de lucru:*

- Se calculează momentul de inerție $I_0$ al platformei goale, măsurând perioada de oscilație $T_0$ a platformei goale (3 măsurători);
- Se montează două corpuri cilindrice pe axul din centrul platformei, unul peste celălalt, astfel ca axa de oscilație să treacă prin centrul lor de greutate.
- Se măsoară perioada de oscilație $T_1$ a sistemului platformă – corpuri (3 măsurători) şi se calculează momentul de inerție al sistemului cu ajutorul formulei: $I_1 = \frac{(m_0 + 2m_c)gRr}{4\pi^2 l}\cdot T_1^2$, unde $m_c$ este masa unui corp. Momentul de inerție al **unui** corp (față de axa care trece prin centrul lui de masă) se calculează uşor: $I_{c0} = \frac{I_1 - I_0}{2}$.
- Se aşează corpurile simetric pe platformă, la distanțe egale, $d$ (*există două poziții posibile d=a şi d=2a, unde a=3.4 cm*) de axul central, se măsoară perioada de oscilație $T_2$ a sistemului platformă – corpuri (câte 3 măsurători pentru fiecare dintre cele două configurații) şi se calculează momentul de inerție al sistemului: $I_2 = \frac{(m_0 + 2m_c)gRr}{4\pi^2 l}\cdot T_2^2$. Momentul de inerție al unuia dintre corpuri (față de o axă, paralelă cu prima, dar care **nu** trece prin centrul de masă al corpului) se calculează uşor: $I_c = \frac{I_2 - I_0}{2}$.

- Dacă teorema lui Steiner este corectă, $I_c = I_{c0} + m_c d^2$. Verificați dacă rezultatele experimentului Dvs. verifică teorema lui Steiner, reprezentând pe un grafic $I_c$ şi $I_{c0} + m_c d^2$, împreună cu erorile corespunzătoare.
- Explicați modul în care ați calculat erorile