

1. INTRODUCERE, MĂRIMI FIZICE, DIMENSIUNI, UNITĂȚI DE MĂSURĂ.

Nu întâmplător studiul fizicii începe cu studiul mecanicii: în cadrul mecanicii veți învăța să descrieți, folosind matematica, fenomene fizice/mecanice observate în natură; învățați noțiuni și mărimi fizice fundamentale (traietorie, viteză, accelerație, energie, câmp, moment cinetic, ...) și legi (legi de conservare, teoremele impulsului, ...) care vor fi folosite în toate capitolele fizicii.

Descrierea, folosind matematica (formule, ecuații), a fenomenelor fizice este foarte importantă pentru comunicare. Dacă, de exemplu, senzația de "viteză mare" (asociată de multe ori cu sunetul motorului mașinii, sau cu vâjâitul aerului în jurul mașinii care se deplasează cu acea viteză) este subiectivă și poate diferi mult de la o persoană la alta, o formulare mai puțin poetică: "viteză de 127 km/h" este mult mai precisă și permite comparația cu alte viteze. Datorită subiectivității, este dificil să comparăm senzații. Este însă foarte ușor să comparăm numere, în anumite condiții.

Mecanica studiază mișcarea corpurilor (solide, lichide, gazoase) și cauzele care produc mișcarea. De obicei împărțim studiul mecanicii în trei părți numite: cinematica, dinamica și statica:

- **Cinematica** este o parte a mecanicii care studiază mișcarea corpurilor în spațiu și timp, făcând abstracție de cauzele mișcării. Cinematica folosește noțiuni ca: *traietorie, viteză, accelerație, ecuație de mișcare, ...*.
- **Dinamica** ia în considerare forțele care acționează asupra corpurilor și studiază efectul forțelor asupra mișcării corpurilor. Vom defini noțiunile de *forță, moment (cinetic, al forței), energie, impuls* și vom descoperi *legi de conservare*.
- **Statica** studiază echilibrul corpurilor sub acțiunea diferitelor tipuri de forțe (introducem noțiunile de *echilibru de translație și rotație, analizăm condițiile de echilibru, ...*).

Acest curs are ca și surse de inspirație manuale de mecanică și de fizică generală. Fiind vorba de un curs de mecanică clasică, diferențele dintre diferitele surse de inspirație folosite se reflectă, de cele mai multe ori, în modul de abordare și prezentare a informațiilor. Aveți aici, deci, "aceeași Mărie, cu altă pălărie". Pentru a ușura lectura m-am ferit să încarc cursul cu indici bibliografici, preferând să listez la început bibliografia recomandată/folosită.

BIBLIOGRAFIE.

1. A. Hristev, *Mecanica și acustica*, Editura Didactică și pedagogică, București, 1982. **Are și probleme la sfârșitul fiecărui capitol.**

2. G. Margaritondo, *Ma Physique*,
http://sb3.epfl.ch/GMPAGEnew/Welcome_files/MA%20PHYSIQUE2002-Vol.I%20copy.pdf
3. D. Kleppner, R. Kolenkov, *An introduction to mechanics*, McGraw-Hill 1983
4. F. W. Sears et al., *Fizica*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983.
5. Ch. Kittel et al., *Cursul de Fizică BERKELEY*, volumul 1, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.
6. D. Halliday, R. Resnick – *Fizica* vol 1, Bucuresti, Editura Didactică și pedagogică, 1972.
7. C. Plăvițiu et al., *Probleme de mecanică, fizică și acustică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.
8. A. Pop, *Metode fundamentale aplicate la rezolvarea problemelor de mecanică*, imprimeria UBB, 2000.

Acest curs de mecanică se adresează în principal studenților din anul I de la Facultatea de Fizică a UBB dar poate fi abordat și de profesori sau elevi de liceu. Se presupune că studenții au noțiuni elementare de matematică: calcul elementar, rezolvarea ecuațiilor sau a sistemelor de ecuații, geometrie, limite, derivate, integrale sau, cel puțin, că aceste noțiuni nu le sunt străine.

LIMBAJUL FIZICII ESTE MATEMATICĂ

Fizica se ocupă de *măsurători*, folosind matematica pentru a descrie relațiile dintre rezultatele diferitelor măsurători (de ex: măsurând spațiul străbătut de un corp în mișcare rectilinie uniformă și timpul în care străbate acest spațiu, putem afla viteza corpului folosind ecuația $v = s / t$).

FIZICA, ca știință a naturii (physis = natură, în limba greacă), **este o știință experimentală**. Este *știință*, pentru că se bazează pe “metoda științifică”¹ în încercarea ei de a explica/prezice fenomenele pe care le studiază și este știință *experimentală* pentru că

¹ Metoda științifică (MS) este metoda prin care se încearcă construirea unei reprezentări corecte, logice și obiective a lumii. MS presupune mai multe etape care trebuie parcurse pentru investigarea fenomenelor și dobândirea de noi cunoștințe, pentru corectarea și/sau integrarea cunoștințelor anterioare. Cele mai importante astfel de etape sunt: 1) Observarea și descrierea fenomenelor sau a unui grup de fenomene, definirea problemei și culegerea de informații, 2) Formularea ipotezelor care ar explica fenomenul (în fizică ipoteza ia, de multe ori, forma unui mecanism cauzal sau a unei expresii matematice), 3) Folosirea ipotezei pentru a prezice existența unor alte fenomene sau pentru a prezice rezultatele cantitative ale unor noi experimente, 4) Efectuarea de experimente pentru testarea prezicerilor.

folosește experimentul ca și test final/verificare a oricărei preziceri sau teorii, prin măsurători ale unor mărimi fizice cu care operează teoria respectivă. Noțiunea de **mărime fizică** are deci sens de cantitate, adică ceva ce poate fi măsurat² și exprimat printr-un număr (**valoarea numerică** a mărimii fizice respective).

A măsura înseamnă a compara ceea ce avem de măsurat, mărimea fizică MF, cu un etalon (unitate de măsură, UM) pentru a vedea de câte ori (= valoarea numerică, V) se cuprinde etalonul în mărimea fizică pe care vrem să o măsurăm. Rezultatul măsurătorii este valoarea numerică a mărimii respective și depinde de mărimea unității de măsură folosită ca etalon.

Vom scrie, deci:

$$MF = V \cdot UM$$

unde prin *MF* am indicat mărimea fizică iar *V* este valoarea numerică a acesteia măsurată cu unitatea de măsură *UM*.

Exemplu: am măsurat lungimea unei mese cu un metru de croitorie (divizat în centimetri), obținând: $l = 220 \text{ cm}$; l = lungimea mesei = mărimea fizică MF, 220 = valoarea *V*, cm = centimetru = unitatea de măsură UM. Mai rămâne să specificăm și care este eroarea măsurătorii, însă noțiunile de calcul/estimare a erorilor vor face subiectul unui curs separat.

Exemplu: putem măsura lungimea cu pasul, palma, liniarul, ruleta, micrometrul, ...; măsurăm timpul cu cronometrul, pendulul, pulsul, ...

Exemple de mărimi fizice (unități de măsură): masa (kg, tone, unitate atomică de masă), forța (N, dyne), timpul (s, minute, ani), intensitatea curentului electric (A), intensitate luminoasă (Cd), energia (J, calorii, electron-volt), Electronul, atomul, câmpul gravitațional **nu** sunt mărimi fizice în sensul enunțat mai sus ci sunt *noțiuni*, cu care fizica operează. Proprietăți ale acestora: sarcina sau spinul electronului, intensitatea câmpului gravitațional într-un punct oarecare, ... sunt *mărimi fizice* care pot fi măsurate.

! Dacă schimbăm unitatea de măsură se modifică valoarea numerică a mărimii fizice.

Lungimea mesei din primul exemplu $l = 220 \text{ cm}$ poate fi scrisă (dacă alegem metrul ca unitate de măsură): $l = 220 \text{ cm} = 220 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 2.20 \text{ m}$. **Mărimea mesei (lungimea ei) nu se modifică prin alegerea altor unități de măsură. Doar valoarea numerică a acelei mărimi fizice, exprimată cu ajutorul altor unități de măsură, se modifică.**

! Putem compara doar mărimi fizice de același tip (lungimi cu lungimi, timpi cu timpi, ...).

Spunem despre mărimile de același tip că au aceeași **dimensiune** (notație [MF]).

² Despre măsurători, erori și calculul acestora veți povesti mai în detaliu în cadrul primelor laboratoare de mecanică.

Exemplu: Lungimea mesei, înălțimea sălii de clasă, distanța de la Pământ la Soare, distanța dintre atomii de Na și Cl în sarea de bucătărie sunt mărimi fizice de același tip, lungimi, au aceeași dimensiune: LUNGIME (L) și le putem compara între ele.

Numărul *minim* de “dimensiuni” de care avem nevoie pentru a exprima toate mărimile fizice din mecanică este 3 (veți putea verifica aceasta încercând să găsiți “dimensiunea” tuturor mărimilor fizice pe care le întâlniți în mecanică.). Convențional, acestea sunt LUNGIMEA (L), MASA (M) și TIMPUL (T). Mărimile fizice asociate acestora se numesc *mărimi fizice fundamentale* (lungimea l , masa m și timpul t). Celelalte mărimi fizice se numesc *mărimi fizice derivate* (impulsul (produsul mv are dimensiune de impuls), forța (produsul ma are dimensiune de forță), viteza, energia (produsul mv^2 are dimensiune de energie), ..., aria, presiunea).

În general, dimensiunea oricărei mărimi fizice din mecanică poate fi scrisă sub forma: $[MF] = L^\alpha M^\beta T^\gamma$ unde α , β și γ sunt numere.

Exemplu: Viteza în mișcarea rectilinie uniformă este definită ca și raportul dintre spațiu parcurs și intervalul de timp în care a fost parcurs acest spațiu: $v = \frac{s}{t}$. “Dimensiunea” vitezei

va fi deci: $[v] = \left[\frac{s}{t} \right] = \frac{[s]}{[t]} = \frac{L}{T} = LT^{-1}$

! Numerele sunt adimensionale (dimensiune 1) iar argumentele funcțiilor trigonometrice, exponențialelor sau logaritmulor trebuie să fie de asemenea adimensionale.

Folosim analiza dimensională îndeosebi pentru a verifica soluția analitică a unei probleme înainte de a efectua calculele numerice (care sunt inutile în cazul în care formula de plecare este greșită). **Dimensiunea termenului din stânga a unei ecuații trebuie să fie egală cu dimensiunea termenului din partea dreaptă a egalității.**

Exemplu: Care din următoarele ecuații este corectă dimensional? $T = 3\pi \frac{\sqrt{l}}{g}$ sau

$T = 3\pi \sqrt{l/g}$? Știm că T este un interval de timp $[T] = T$; $[2\pi] = 1$; l este o lungime $[l] = L$ iar g este accelerația gravitațională $[g] = L/T^2$. În primul caz, obținem că T este egal cu $\frac{L^{1/2}}{L/T^2} = T^2 L^{-1/2}$ ceea ce este greșit, în al doilea caz T este egal cu $\left(\frac{L}{L/T^2} \right)^{1/2} = (T^2)^{1/2} = T$, ceea ce este corect.

! Faptul că o ecuație este corectă din punct de vedere (dpdv) dimensional nu înseamnă că ea este corectă și dpdv fizic, vezi exemplul de mai sus dacă T este perioada unui pendul matematic de lungime l . Nici una din ecuațiile de mai sus nu este corectă dpdv fizic deși cea de-a doua este corectă dpdv dimensional. Forma corectă este: $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ și nu am fi putut ajunge la ea dint-o simplă analiză dimensională.

Pe de altă parte:

! O ecuație incorectă dpdv dimensional este incorectă si dpdv fizic .

Unitățile de măsură, așa cum le-am definit la începutul capitolului sunt etaloanele pe care le folosim pentru măsurarea mărimilor fizice. Reamintim că pentru măsurarea lungimii lungime putem avea ca etaloane metrul, palma, centimetrul, pasul, ... și mai puteți defini și Dvs. câteva. Toate aceste etaloane pot fi folosite atâta timp cât sunt precis definite. Pentru facilitarea comunicării/înțelegerii rezultatelor măsurătorilor s-a adoptat un sistem coerent de unități de măsură care în mecanică se numește (MKS = **Metru (m)**, **Kilogram (kg)**, **Secundă (s)**). Sistemul MKS folosește doar trei unități de bază pentru mecanică, număr egal cu numărul minim de “dimensiuni” necesare în mecanică, vezi mai sus. *Unitatea de măsură a oricărei mărimi fizice din mecanică poate fi exprimată în funcție de m, kg și s.*

Dacă vrem să efectuăm măsurători ale unor mărimi fizice din alte domenii ale fizicii (electricitate și magnetism, termodinamică, optică), MKS nu este suficient. Pentru a completa MKS, se adaugă ca și unități de măsură (dimensiuni) **Amperul**, A (intensitatea curentului electric), **Candela**, Cd (intensitate luminoasă), **Kelvin**, K (temperatură), **mol**, mol (cantitate de substanță; trebuie specificat la ce se referă: mol de atomi, de molecule, ioni, electroni, particule ...). Acest sistem de unități de măsură se mai numește și **Sistem Internațional de Unități**³ (SI).

³ Bureau Internațional des Poids et Mesures, definitions:

- The **metre** is the length of the path travelled by light in vacuum during a time interval of 1/299 792 458 of a second.
- The **kilogram** is the unit of mass; it is equal to the mass of the international prototype of the kilogram.
- The **second** is the duration of 9 192 631 770 periods of the radiation corresponding to the transition between the two hyperfine levels of the ground state of the caesium 133 atom.
- The **ampere** is that constant current which, if maintained in two straight parallel conductors of infinite length, of negligible circular cross-section, and placed 1 m apart in vacuum, would produce between these conductors a force equal to 2×10^{-7} newton per metre of length.
- The **kelvin**, unit of thermodynamic temperature, is the fraction 1/273.16 of the thermodynamic temperature of the triple point of water.
- The **mole** is the amount of substance of a system which contains as many elementary entities as there are atoms in 0.012 kilogram of carbon 12.

Pentru a indica valori numerice foarte mari (mici) se folosesc multipli (submultipli).

Multipli	Prefix		deca	hecto	kilo	mega	giga	tera	peta	exa	zetta	yotta
	Symbol		da	h	k	M	G	T	P	E	Z	Y
	Factor	10^0	10^1	10^2	10^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}	10^{18}	10^{21}	10^{24}
Submultipli	Prefix		deci	centi	mili	micro	nano	pico	femto	atto	zepto	yocto
	Symbol		d	c	m	μ	n	p	f	a	z	y
	Factor	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-18}	10^{-21}	10^{-24}

Exemplu: $1 \text{ km} = 10^3 \text{ m}$, $1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$, etc. .

! Chiar dacă unitatea de măsură a oricărei mărimi fizice poate fi exprimată folosind unități de măsură a Sistemului Internațional, și multipli (sau submultipli) acestora, vom întâlni adeseori în fizică unități de măsură suplimentare folosite fie pentru simplificarea scrierii rezultatelor în diverse domenii ale fizicii, fie din rațiuni culturale/istorice.

Exemple:

- N (Newton) ca unitate de măsură pentru forță ($1\text{N} = 1 \text{ kg m/s}^2$);
- Å (Angstrom) ca unitate de măsură a lungimilor în fizica atomică ($1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ m}$, ordinul de mărime al distanțelor interatomice);
- an lumină pentru distanțe interstelare;
- cal putere pentru puterea motoarelor (și nu wați, ca pentru puterea becurilor);
- Pascal, bar, psi, atmosferă, milimetru coloană de mercur, ... pentru presiune.
- Minut, oră, zi, ... pentru durată
- Electron-volt (pentru energie)
- Unitate atomică de masă, pentru masele atomilor/moleculelor
- Litru pentru volum, ... lista este foarte lungă

-
- The **candela** is the luminous intensity, in a given direction, of a source that emits monochromatic radiation of frequency 540×10^{12} hertz and that has a radiant intensity in that direction of $1/683$ watt per steradian.

! Pentru a trece de la o unitate de măsură la alta de același tip, există *tabele de conversie*. De exemplu, pentru presiune:

	Pascal (Pa)	bar (bar)	atmosferă tehnică (at)	atmosferă (atm)	torr (Torr)	pound-force per square inch (psi)
1 Pa	$\equiv 1 \text{ N/m}^2$	10^{-5}	1.0197×10^{-5}	9.8692×10^{-6}	7.5006×10^{-3}	145.04×10^{-6}
1 bar	100,000	$\equiv 10^6 \text{ dyn/cm}^2$	1.0197	0.98692	750.06	14.5037744
1 at	98,066.5	0.980665	$\equiv 1 \text{ kgf/cm}^2$	0.96784	735.56	14.223
1 atm	101,325	1.01325	1.0332	$\equiv 1 \text{ atm}$	760	14.696
1 torr	133.322	1.3332×10^{-3}	1.3595×10^{-3}	1.3158×10^{-3}	$\equiv 1 \text{ Torr};$ $\approx 1 \text{ mmHg}$	19.337×10^{-3}
1 psi	6.894×10^3	68.948×10^{-3}	70.307×10^{-3}	68.046×10^{-3}	51.715	$\equiv 1 \text{ lbf/in}^2$

! Sistemul Internațional nu este singurul sistem de unități acceptat. Cea mai cunoscută alternativă este CGS (bazat pe Centimetru-Gram-Secundă). Dacă în mecanică convertirea din unități MKS în CGS este foarte simplă, acesta nu mai este cazul pentru alte domenii ale fizicii, în special electricitate și magnetism. Las colegilor mei de la aceste discipline plăcerea de a vă desluși tainele conversiei unităților de măsură în măsurătorile care implică sarcini electrice, câmpuri electrice și magnetice, tensiuni electrice, etc. .

În continuare, în studiul mecanicii vom folosi doar SI pentru a exprima rezultatele măsurătorilor și unitățile de măsură ale mărimilor fizice definite.

2. CINEMATICA PUNCTULUI MATERIAL.

Cinematica studiază mișcarea în spațiu și timp făcând abstracție de cauzele mișcării. Definim mai jos o parte din noțiunile pe care le întâlnim în acest capitol.

Punct material: având în vedere complexitatea naturii, în studiul ei recurgem adesea la simplificări (modele) eliminând elementele neesențiale care nu influențează (sau influențează foarte puțin) rezultatele investigațiilor noastre. Simplificările efectuate trebuie să țină seama de scopul analizei noastre. Mișcarea planetelor în jurul soarelui poate fi analizată fără a ține cont de rugozitatea suprafeței acestora (considerându-le niște sfere); Dacă studiem căderea unui măr de la o anumită înălțime și dorim să aflăm viteza cu care atinge solul, putem să-l considerăm pe acesta ca un punct geometric dotat cu masă (= **punct material**: nu ne interesează dimensiunile sale geometrice și rotația proprie, cu atât mai puțin culoarea sa - dacă dimensiunile corpului sunt mult mai mici decât înălțimea de cădere). Aproximația nu mai este bună în cazul în care ceea ce dorim să aflăm este care parte a mărului va atinge prima solul, sau în cazul în care dimensiunile mărului sunt comparabile cu distanța de la care îi dăm drumul. Chiar și în acest al doilea caz, mărul nu va fi reprezentat ca atare în calculele noastre ci, într-o primă aproximație, ar putea fi considerat o sferă.

În cinematică nici masa corpului nu ne interesează. Obiectul pe care-l obținem, adică “punctul material fără masă” îl numim: **mobîl**.

Alte modele folosite adesea în mecanică: **corp rigid** (distanțele dintre părțile acestuia sunt fixe, nu se deformează în timpul mișcării); **fluid ideal**: se neglijează frecarea între particulele fluidului;

Sistem/corp de referință: Pentru a putea spune despre un corp că este în mișcare (sau în repaus) trebuie să raportăm poziția lui la poziția unui alt corp, numit corp de referință. Dacă de acel corp legăm rigid un sistem de coordonate (de ex. un sistem cartezian ortogonal de 3 axe de coordonate) obținem un sistem de referință (SR).

Mișcarea este relativă: un corp poate să fie în mișcare față de un sistem de referință și în același timp în repaus (sau în alt fel de mișcare) față de un alt sistem de referință. Mișcarea este simplă, privită din unele sisteme de referință și complicată, privită din altele. *Va trebui să vă obișnuiți să alegeți SR cel mai adecvat problemei pe care o aveți de studiat, pentru ca rezolvarea acesteia să fie cât mai simplă. Atunci și interpretarea și comunicarea rezultatelor va fi mai ușoară.*

Exemplu: Dacă alegem ca și corp de referință (referențial) un stâlp dintr-o gară, atunci toate băncile și toți ceilalți stâlpi din gară sunt în repaus față de acel referențial. Toți oamenii care stau pe băncile din gară sunt de asemenea în repaus. Clădirea gării de

asemenea. **De ce sunt în repaus? Pentru că poziția lor față de acel referențial nu se schimbă.** Altfel spus, dacă desenăm o linie dreaptă între corpul de referință și o bancă (de exemplu), lungimea și orientarea spațială a acelei linii drepte nu se modifică în timp. **Atenție:** mișcare nu înseamnă numai modificarea distanței dintre corp și referențial. Putem avea mișcare și când distanța rămâne constantă dar se modifică orientarea corpului față de referențial (se deplasează pe un cerc, de exemplu). Trenul care tocmai trece prin gară este în mișcare **față de** stâlpul de referință pentru că atât mărimea, cât și orientarea dreptei care leagă stâlpul de tren se modifică în timp. Pe de altă parte, dacă alegem ca și corp de referință trenul, toate obiectele din tren sunt în repaus față de acesta, însă gara, stâlpii din gara și pietonii se deplasează. **MIȘCAREA ESTE RELATIVĂ.**

Traectorie: Numim traiectorie locul geometric al punctelor prin care trece mobilul în mișcarea sa = curba descrisă de mobil în timpul mișcării sale. Traectoria poate să fie rectilinie (linie dreaptă) sau curbilinie (caz particular: circulară).

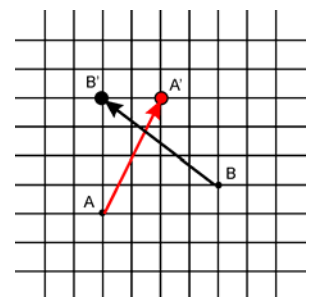
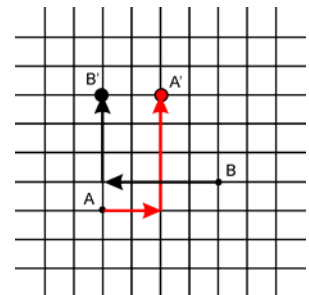
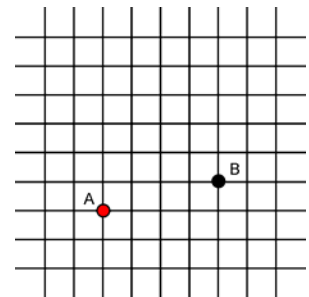
2.1. Vectori.

După cum am precizat la începutul acestui curs, în studiul fenomenelor fizice folosim matematica pentru exprimarea ideilor și a rezultatelor, adesea complicate, într-o formă compactă și simplă. Analiza/Algebra vectorială, în forma pe care o prezentăm aici ⁴, este un bun exemplu pentru rolul matematicii în fizică și în plus ne va fi foarte utilă pentru descrierea legilor cinematicii, și nu numai.

Cei cărora noțiunea de “vector” și operațiile cu vectori le sunt familiare, povestea introductivă din exemplul de mai jos, despre calculul vectorial, li se va părea puerilă. Pot să sară peste lectura acestui exemplu gândindu-se că, mai devreme sau mai târziu, toți citim Scufița Roșie.

Exemplu:

Să așezăm două bile, una roșie (BR) și una neagră (BN), pe o foaie cu pătrățele în punctele A și B și să le deplasăm folosind

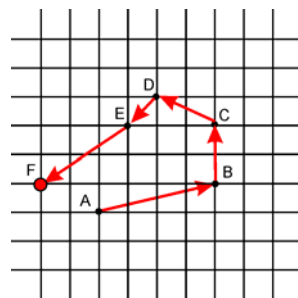


⁴ Algebra vectorială, în forma pe care o folosim noi astăzi, a apărut pentru prima dată în notițele lui J. Willard Gibbs (1839-1903, cunoscut în principal pentru rezultatele sale din termodinamică) pregătite pentru studenții săi de la Universitatea Yale (USA). Motivația principală a fizicienilor pentru folosirea noțiunii de vector este, se va vedea, simplificarea formei ecuațiilor folosite. Pe de altă parte, combinând analiza vectorială cu elementele de simetrie, putem obține informații prețioase asupra formelor posibile ale unor legi necunoscute.

următoarea convenție: bilele pot fi deplasate doar cu câte un număr întreg de pătrate (unități) spre stânga (dreapta), sus (jos). Pentru a diferenția orientarea stânga-dreapta, sus-jos a deplasărilor, deplasările spre dreapta (sau în sus) sunt considerate pozitive iar cele înspre stânga (sau în jos), sunt considerate negative. **Exemplu:** în figura din dreapta, BR a fost deplasată două unități spre *dreapta* și patru în *sus*, în poziția A'; BN a fost deplasată cu patru unități spre *stânga* și trei în *sus*, în poziția B'. Pentru simplificarea notației, aceste deplasări le putem nota (2,4) și respectiv (-4,3). Prima cifră indică deplasarea *dreapta*(+), *stânga*(-) iar a doua, deplasarea *sus*(+), *jos*(-).

Deplasările AA', BB' pot fi identificate și prin săgeți (săgeți = segmente de dreaptă orientate): deplasarea AA' este, în notația prescurtată, deplasarea (2,4), iar deplasarea BB' este (-4,3). Dacă dorim, putem calcula lungimea segmentelor AA' și BB' folosind teorema lui Pitagora: $AA' = \sqrt{2^2 + 4^2}$ iar $BB' = \sqrt{4^2 + 3^2}$.

Să calculăm acum care este deplasarea bilei roșii care pleacă din punctul A și ajunge în punctul F, trecând prin punctele B, C, D, E și F. Din figură, se vede ușor că deplasarea AF este (-2,1), rezultat la care ajungem și dacă însumăm deplasările individuale: $AB = (4,1)$, $BC = (0,2)$, $CD = (-2,1)$, $DE = (-1,-1)$, $EF = (-3,-2)$ și le adunăm: $AF = AB + BC + CD + DE + EF = (4,1) + (0,2) + (-2,1) + (-1,-1) + (-3,-2) = (4 + 0 - 2 - 1 - 3, 1 + 2 + 1 - 1 - 2) = (-2,1)$ QED.



Tocmai am folosit cu succes ceea ce numim vectori, ca și segmente de dreaptă orientate, pentru a defini și măsura deplasarea bilei roșii (și a celei negre), în exemplele de mai sus.

Observăm că, dacă destinația ar fi coincis cu punctul de plecare, adică F ar fi coincis cu A, atunci deplasarea AF ar fi fost (0,0). ! Atenție ! DEPLASAREA și DRUMUL PARCURS (DISTANȚA STRĂBĂTUTĂ) sunt două noțiuni diferite, având semnificații diferite. Drumul parcurs este suma lungimilor segmentelor parcurse. Folosind teorema lui Pitagora, acolo unde este cazul, și folosind notația: $|AB|$ = distanța AB, vom avea: Distanța străbătută = $|AB| + |BC| + |CD| + |DE| + |EF| = \sqrt{4^2 + 1^2} + 2 + \sqrt{2^2 + 1^2} + \sqrt{1^2 + 1^2} + \sqrt{3^2 + 2^2}$ m, dacă lungimea laturii unui pătrat este 1 m.

Din punct de vedere geometric un vector este un segment de dreaptă orientat iar în reprezentare grafică este o săgeată (vezi Figura 1). Pentru descrierea unui vector avem nevoie de MĂRIME, DIRECȚIE și SENS.

MĂRIMEA vectorului este lungimea segmentului de dreaptă.

DIRECȚIA este dată de dreapta suport a vectorului. Pe o direcție putem avea două sensuri $\Rightarrow$ sensul trebuie specificat. *Fiecare vector indică o direcție și un sens pe acea direcție.*

SENSUL (pe direcția respectivă) este indicat de vârful săgeții.

Notație: $\vec{V}$ sau $\mathbf{v}$ (caractere îngroșate, BOLD) pentru vectori și $|\vec{V}|$ sau $|\mathbf{v}|$ sau v pentru mărimea (modulul) vectorului. În cele ce urmează vom încerca să fim consecvenți și să folosim notații de forma $\vec{V}$ pentru vectori și respectiv v pentru mărimea acestora.

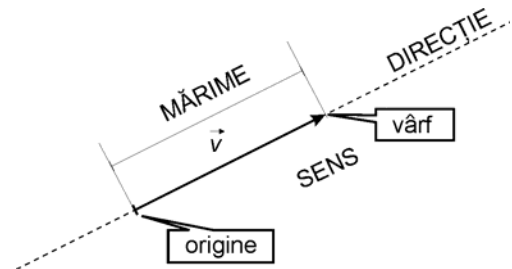


Figura 1: Descrierea vectorului $\vec{V}$. Sunt reprezentate MĂRIMEA, DIRECȚIA, SENSUL, originea vectorului și vârful acestuia.

În fizică forța (Figura 2), viteza, accelerația, intensitatea câmpului electric, etc. sunt MĂRIMI FIZICE VECTORIALE: trebuie să le specificăm mărimea, direcția și sensul pentru a le caracteriza complet. Masa, energia, densitatea, presiunea, etc. sunt MĂRIMI FIZICE SCALARE: le caracterizăm doar prin mărime (număr). Atât pentru mărimile fizice vectoriale cât și pentru cele scalare, menționarea unității de măsură este absolut necesară.

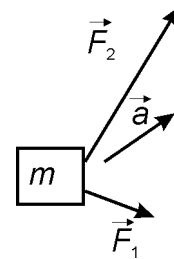


Figura 2. Exemple de vectori (forțele $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$, accelerația $\vec{a}$) și scalari (masa m).

2.2. Operații cu vectori.

Înmulțirea unui vector $\vec{a}$ cu un scalar (număr) b .

Rezultatul este un vector, vezi Figura 3, să-l notăm $\vec{c}$; $\vec{c} = \vec{a}b = b\vec{a}$

- Mărime: $c = a \cdot b$. Mărimea lui $\vec{c}$ este de b ori mărimea lui $\vec{a}$. Dacă $b > 1$ mărimea vectorului $\vec{c}$ este mai mare decât mărimea vectorului $\vec{a}$; dacă $b < 1$ mărimea vectorului $\vec{c}$ este mai mică decât mărimea vectorului $\vec{a}$.
- Direcție: $\vec{c}$ are aceeași direcție cu vectorul $\vec{a}$
- Sens: Același sens cu $\vec{a}$ dacă $b > 0$, sens opus lui $\vec{a}$ dacă $b < 0$.

Împărțirea unui vector $\vec{a}$ cu un scalar (număr) b .

Rezultatul este un vector, vezi Figura 4, să-l notăm $\vec{c}$; $\vec{c} = \frac{\vec{a}}{b}$

- Mărime: $c = a / b$, i.e. mărimea lui $\vec{c}$ este de $1/b$ ori mărimea lui $\vec{a}$. Dacă $b > 1$ mărimea vectorului $\vec{c}$ este mai mică decât mărimea vectorului $\vec{a}$, dacă $b < 1$ mărimea vectorului $\vec{c}$ este mai mare decât mărimea vectorului $\vec{a}$.
- Direcție: $\vec{c}$ are aceeași direcție cu vectorul $\vec{a}$
- Sens: Același sens cu $\vec{a}$ dacă $b > 0$, sens opus lui $\vec{a}$ dacă $b < 0$.

! ATENȚIE ! ÎMPĂRȚIREA LA UN VECTOR NU ESTE DEFINITĂ (nu putem împărți ceva la o direcție sau la un sens).

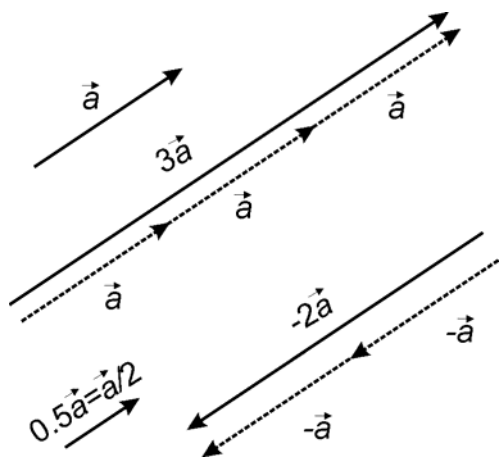


Figura 3: Exemple de înmulțire a unui vector $\vec{a}$ cu diverși scalari pozitivi sau negativi, subunitari sau supraunitari.

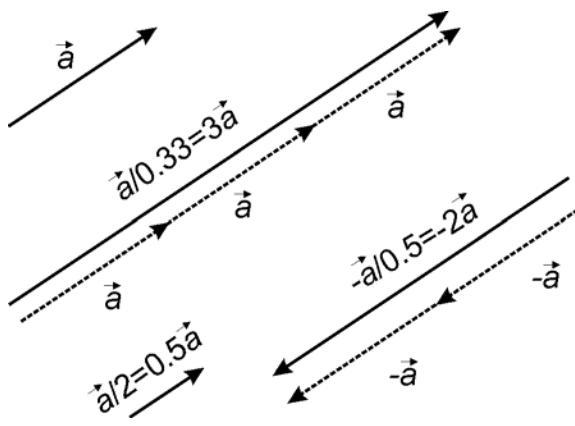


Figura 4: Exemple de împărțire a unui vector $\vec{a}$ cu diverși scalari pozitivi sau negativi, subunitari sau supraunitari.

Ce obținem dacă împărțim un vector cu modulul său?

Obținem un vector: $\vec{c} = \frac{\vec{a}}{a}$

- Mărime: $c = a / a = 1$, un vector de mărime unitate = VERSOR.
- Direcție: $\vec{c}$ are aceeași direcție cu vectorul $\vec{a}$
- Sens: Același sens cu $\vec{a}$.

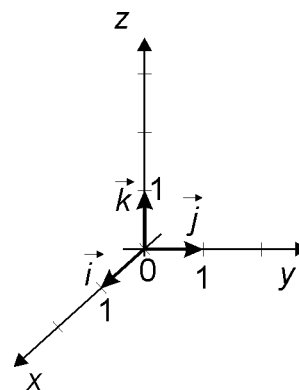


Figura 5. Versorii axelor de coordonate x, y și z.

! PUTEM AFLA VECTORUL UNITATE AL UNEI DIRECȚII

DESCRISĂ DE UN VECTOR, ÎMPĂRȚIND ACEL VECTOR LA MODULUL SĂU !

Notăție: $\frac{\vec{a}}{a} = \vec{1}_a$, vector unitate pe direcția lui $\vec{a}$ iar $\vec{a} = a\vec{1}_a$. Se citește: vectorul $\vec{a}$ este egal cu produsul dintre mărimea lui $\vec{a}$ și vectorul unitate (versorul) pe direcția lui $\vec{a}$, $\vec{1}_a$

! VERSORII NU AU UNITATE DE MĂSURĂ $\equiv$ SUNT ADIMENSIONALI. !

Într-un sistem de coordonate (necoplanare) xyz , versorii direcțiilor descrise de cele trei axe sunt notați de obicei cu $\vec{i}$ pentru direcția x , $\vec{j}$ pentru direcția y și cu $\vec{k}$ pentru direcția z , vezi *Figura 5*. Dacă un vector $\vec{V}$ este orientat de-a lungul direcției x (de exemplu) poate fi scris ca: $\vec{V} = V_x\vec{i}$, și similar pentru vectorii care sunt orientați de-a lungul celorlalte axe.

Adunarea (compunerea) vectorilor.

Fie doi vectori $\vec{a}$ și $\vec{b}$. Rezultatul adunării vectorului $\vec{a}$ cu vectorul $\vec{b}$ este tot un vector, să-l notăm cu $\vec{c}$. $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

- Mărime:
 $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha$
(vezi produsul scalar)

- Direcție: vezi *Figura 6*
- Sens: vezi *Figura 6*

Adunarea vectorilor are o reprezentare/interpretare geometrică simplă:

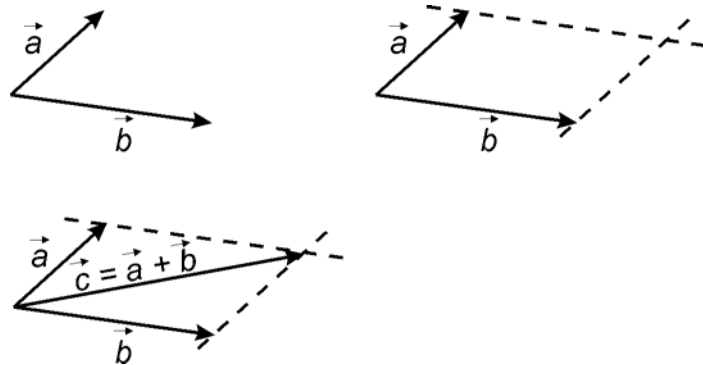


Figura 6. Regula paralelogramului pentru adunarea vectorilor.

Regula paralelogramului: Cei doi vectori se reprezintă astfel încât să aibă originea comună. Se desenează un paralelogram, ca în *Figura 6*, ducând câte o paralelă la fiecare din vectori, care să treacă prin vârful celuilalt vector. *Vectorul sumă este diagonala paralelogramului (care din ele? Cea care unește originea comună a vectorilor cu vârful opus).* Dacă avem de adunat mai mulți vectori, efectuăm aceeași operație de mai multe ori:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} = (((\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}) + \vec{d}) + \vec{e}$$

Se poate demonstra că adunarea vectorilor este:

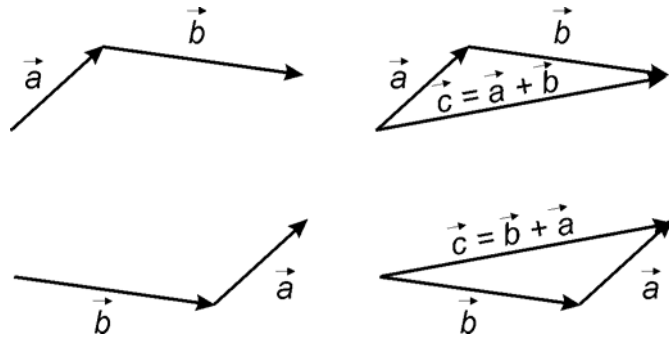
- Comutativă
 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

- Asociativă

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$
- Distributivă

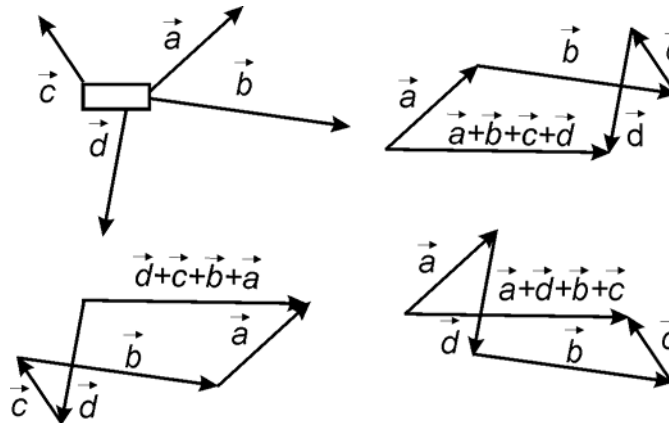
$$(\vec{c} + \vec{d})\vec{a} = \vec{c}\vec{a} + \vec{d}\vec{a}$$

$$\vec{c}(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c}\vec{a} + \vec{c}\vec{b}$$



Regula triunghiului – pentru adunarea a doi vectori (poligonului – pentru adunarea mai multor vectori):

Se reprezintă vectorii ca în *Figura 7*, unul după celălalt (i.e. cu originea în vârful vectorului precedent). Vectorul sumă este obținut unind originea primului vector cu vârful ultimului vector.



Scăderea vectorilor.

Fie doi vectori $\vec{a}$ și $\vec{b}$. Rezultatul scăderii lui $\vec{b}$ din $\vec{a}$ este un vector, să-l notăm $\vec{c}$. $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

- Mărime:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$
 (vezi produsul scalar)
- Direcție: vezi *Figura 8*.
- Sens: vezi *Figura 8*.

Figura 7. Regula triunghiului (poligonului) pentru adunarea vectorilor.

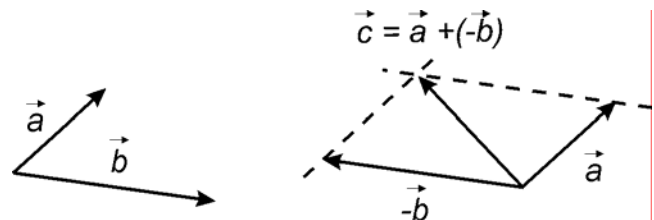


Figura 8. Scăderea vectorilor. Metoda 1.

Deoarece $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$, pentru scăderea lui $\vec{b}$ din $\vec{a}$, trebuie să-l înmulțim pe $\vec{b}$ cu -1 și să-l adunăm cu $\vec{a}$, vezi *Figura 8*. Direcția și sensul vectorului $\vec{c}$ o obținem din regula paralelogramului. Se observă

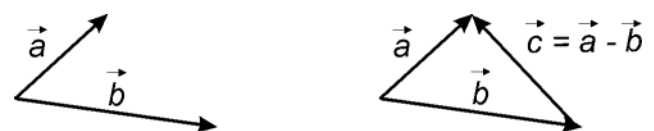


Figura 9. Scăderea vectorilor. Metoda 2

că vectorul $\vec{c}$ putea fi obținut și fără construcția ajutoare $(-\vec{b})$, unind vârful lui $\vec{b}$ cu vârful lui $\vec{a}$, adică a scăzătorului cu a descăzutului, vezi *Figura 9*.

Scăderea vectorilor are aceleași proprietăți ca și adunarea: comutativă, asociativă, distributivă.

! PUTEM ADUNA/SCĂDEA DOAR VECTORI CARE DESCRU ACELAȘI TIP DE MĂRIME FIZICĂ i.e. AU ACEEAȘI UNITATE DE MĂSURĂ, CARE VA FI ȘI UNITATEA DE MĂSURĂ A REZULTATULUI !

Produsul vectorial a doi vectori.

Prin definiție produsul vectorial (notație $\times$) a doi vectori $\vec{a}$ și $\vec{b}$ care fac între ei unghiul α este un vector $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ (vezi Figura 10) care are:

- Mărime: $c = ab \sin \alpha$, egală cu aria paralelogramului format din cei doi vectori, vezi Figura

11. **! DOI VECTORI SUNT COLINIARI DACĂ PRODUSUL LOR VECTORIAL ESTE NUL !** (aria paralelogramului format de doi vectori paraleli este nulă).

- Direcție: perpendiculară pe cei doi vectori
- Sens: dat de **regula mâinii drepte**:

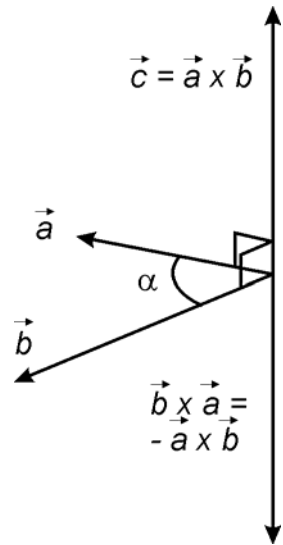


Figura 10. Produsul vectorial a doi vectori.

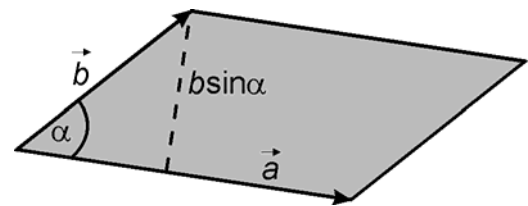


Figura 11. Mărimea vectorului produs vectorial a doi vectori este egală cu aria paralelogramului format de cei doi vectori: $c = ab \sin \alpha$

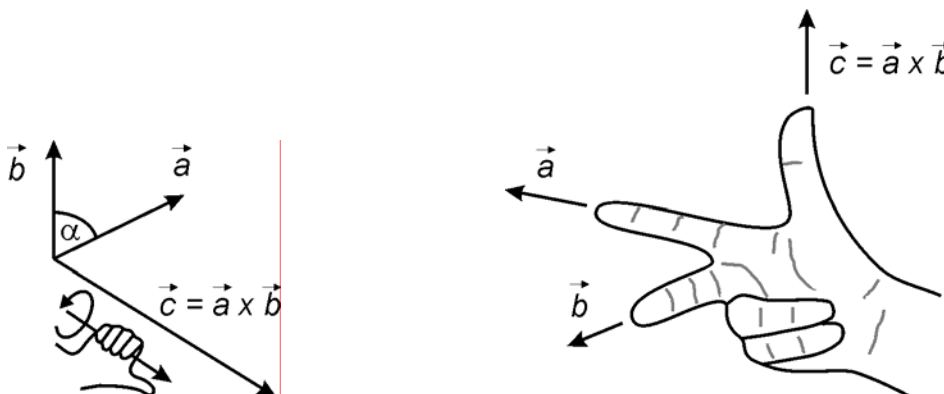


Figura 12a. Regula mâinii drepte pentru determinarea sensului și a direcției produsului vectorial a doi vectori. 12b. Regula mâinii drepte: varianta 2.

orientăm palma mâinii drepte cu degetele întinse de-a lungul vectorului $\vec{a}$ (degetul mare orientat perpendicular pe celelalte degete) iar apoi îndoim degetele înspre vectorul $\vec{b}$, pe drumul cel mai scurt. Degetul mare vă va da direcția și sensul vectorului produs vectorial dintre $\vec{a}$ și $\vec{b}$ (este perpendicular și pe $\vec{a}$ și pe $\vec{b}$), vezi *Figura 12a*. O altă variantă: **regula burghiului** drept, a tirbușonului, a capacului de pix, ...: țineți pixul cu o mână, de corpul acestuia (nu de capac) perpendicular pe vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$. Rotiți capacul la fel cum ați roti vectorul $\vec{a}$ peste vectorul $\vec{b}$ pe drumul cel mai scurt. Sensul de înaintare al capacului vă va da sensul vectorului produs vectorial dintre $\vec{a}$ și $\vec{b}$. **O altă variantă**, *Figura 12 b*: orientăm arătătorul mâinii drepte de-a lungul vectorului $\vec{a}$, degetul mijlociu (perpendicular pe arătător) de-a lungul vectorului $\vec{b}$. Degetul mare, perpendicular pe celelalte două degete, va indica direcția și sensul vectorului produs vectorial $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

- produsul vectorial este *anticomutativ*:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

Proiecția unui vector pe o axă.

Definim proiecția unui vector pe o axă ca fiind un **SCALAR**, care se obține ducând perpendiculare din originea și vârful vectorului, pe acea axă (proiecția ortogonală). Dacă notăm cu α unghiul dintre vector și axa respectivă, atunci mărimea proiecției este $b \cos \alpha$, vezi *Figura 13*.

Produsul scalar a doi vectori.

Prin combinarea a doi vectori folosind produsul scalar obținem un scalar (număr). Dacă $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt doi vectori, produsul scalar "c" al celor doi vectori se definește ca:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = c = ab \cos \alpha.$$

Din *Figura 14* se observă că $b \cos \alpha$ este proiecția lui $\vec{b}$ pe direcția lui $\vec{a}$. Însă $b \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a} = \frac{\vec{a}}{a} \cdot \vec{b} = \vec{1}_a \cdot \vec{b}$.

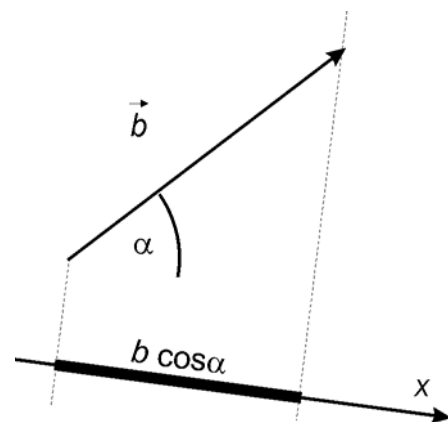


Figura 13. Proiecția unui vector $\vec{b}$ pe o axă x .

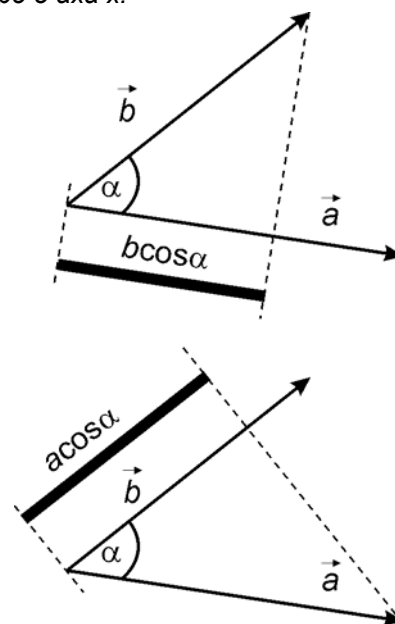


Figura 14. Proiecția (ortogonală) a vectorului $\vec{b}$ pe vectorul $\vec{a}$ (sus) și a vectorului $\vec{a}$ pe vectorul $\vec{b}$ (jos).

Deci proiecția lui $\vec{b}$ pe direcția $\vec{a}$, o obținem înmulțind scalar vectorul $\vec{b}$ cu versorul direcției $\vec{a}$.

La fel, $a \cos \alpha$ este proiecția lui $\vec{a}$ pe direcția lui $\vec{b}$: $a \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{b} = \vec{a} \cdot \frac{\vec{b}}{b} = \vec{a} \cdot \vec{1}_b$. Deci proiecția lui $\vec{a}$ pe direcția $\vec{b}$, o obținem înmulțind scalar vectorul $\vec{a}$ cu versorul direcției $\vec{b}$.

Generalizând, putem afirma că:

! PROIECȚIA UNUI VECTOR PE O AXĂ OARECARE O OBȚINEM ÎNMULȚIND SCALAR VECTORUL CU VERSORUL AXEI RESPECTIVE !

Mai mult,

! UNGHIIUL DINTRE DOI VECTORI POATE FI CALCULAT DACĂ SE CUNOSC PRODUSUL SCALAR A CELOR DOI VECTORI ȘI MĂRIMILE VECTORILOR RESPECTIVI: $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab}$!

Dacă unghiul dintre direcțiile celor doi vectori este de 90° , i.e. vectorii sunt perpendiculari, produsul lor scalar este nul ($\cos 90 = 0$)

! CONDIȚIA DE PERPENDICULARITATE: DOI VECTORI SUNT PERPENDICULARI ATUNCI CÂND PRODUSUL LOR SCALAR ESTE NUL. !

Exemplu:

Dacă $\vec{i}$, $\vec{j}$ și $\vec{k}$ sunt versorii unui sistem de axe perpendiculare x, y și z, atunci:

$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$ ($\vec{i} \cdot \vec{i} = i \cdot i \cos 0$, vectorii sunt versori deci au mărimea $i = 1$ iar unghiul dintre ei este de 0 grade). Analog: $\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$ și $\vec{k} \cdot \vec{k} = 1$. Produsele mixte sunt nule: $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$, $\vec{i} \cdot \vec{k} = 0$ și $\vec{j} \cdot \vec{k} = 0$ deoarece unghiul dintre versori este de 90 grade.

Ce obținem dacă înmulțim scalar, un vector cu el însuși?

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = aa \cos 0 = a^2$$

! PĂTRATUL MĂRIMII (MODULULUI) UNUI VECTOR ÎL PUTEM CALCULA ÎNMULȚIND SCALAR VECTORUL CU EL ÎNSUȘI. !

Exemplu:

Să calculăm mărimea vectorului $\vec{c}$ sumă a doi vectori $\vec{a}$ și $\vec{b}$: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Conform definiției de mai sus, pătratul mărimii vectorului $\vec{c}$ îl putem afla înmulțind scalar vectorul $\vec{c}$ cu el însuși:

$$\begin{aligned} c^2 &= \vec{c} \cdot \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = \\ &= a^2 + ab \cos \alpha + ba \cos \alpha + b^2 = \\ &= a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha \end{aligned}$$

O expresie similară pentru scăderea vectorilor poate fi dedusă ușor.

Descompunerea vectorilor.

Descompunerea vectorilor este operația inversă compunerii. Fie $\vec{a}$ un vector și x, y două direcții (axe) oarecare, neparalele, din plan. Ducând, prin vârful și originea vectorului $\vec{a}$, paralele la direcțiile din plan, obținem două componente, $\vec{a}_x$ și $\vec{a}_y$. Se poate ușor verifica: $\vec{a}_x + \vec{a}_y = \vec{a}$, Figura 15, stânga. **Dacă cele două direcții (axe) sunt perpendiculare**, atunci mărimile vectorilor $\vec{a}_x$ și $\vec{a}_y$ sunt chiar **PROIECȚIILE** vectorului $\vec{a}$ pe axa x și respectiv y , în sensul definiției date mai sus, vezi Figura 15, dreapta.

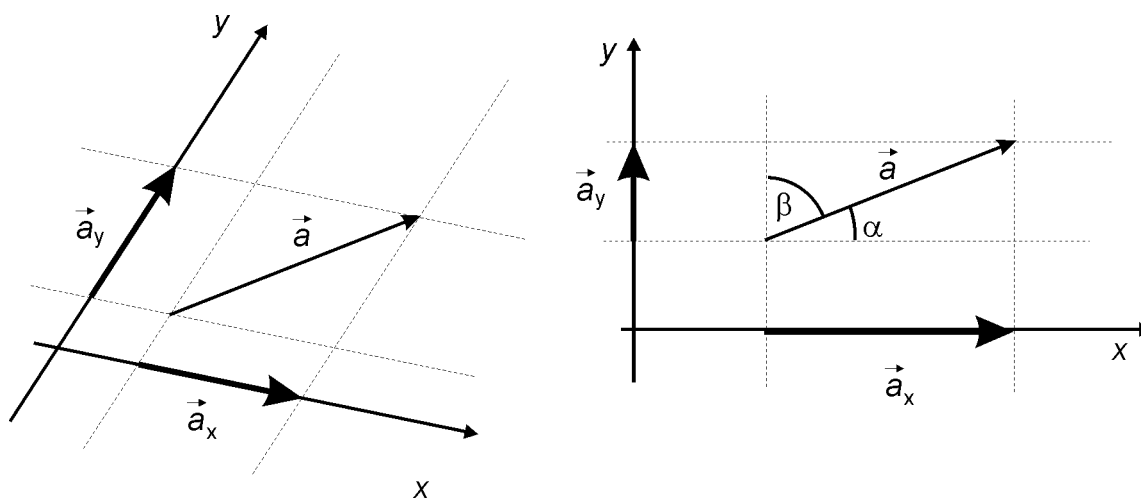


Figura 15. stânga: descompunerea unui vector pe două axe oarecare, neparalele; dreapta: descompunerea unui vector pe două axe perpendiculare.

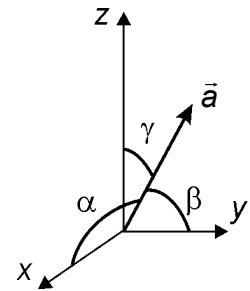
Dacă $\vec{i}$ și $\vec{j}$ sunt versorii celor două axe, $\vec{a}_x$ se poate scrie ca $\vec{a}_x = a_x \vec{i}$, $\vec{a}_y = a_y \vec{j}$ iar $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$.

DACĂ CELE DOUĂ AXE SUNT PERPENDICULARE (adică $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$), se poate arăta ușor că proiecția vectorului $\vec{a}$ pe axa x , a_x , o obținem înmulțind scalar vectorul ($\vec{a}$) cu versorul axei ($\vec{i}$): $a_x = \vec{a} \cdot \vec{i} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j}) \cdot \vec{i} = a_x \vec{i} \cdot \vec{i} + a_y \vec{j} \cdot \vec{i}$ deoarece $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$ iar $\vec{j} \cdot \vec{i} = 0$, axele fiind perpendiculare. Analog pentru a_y : $a_y = \vec{a} \cdot \vec{j}$.

Dacă se cunosc unghiurile dintre vector și axele de coordonate, **unghiurile directoare α și β** , atunci: $a_x = a \cos \alpha$, $a_y = a \cos \beta$.

ÎN CELE CE URMEAZĂ NE VOM OCUPA DOAR DE CAZUL ÎN CARE AXELE DE COORDONATE SUNT PERPENDICULARE.

Generalizare: În cazul în care vectorul $\vec{a}$ este în spațiu și ne alegem un sistem de 3 axe de coordonate perpendiculare x , y și z (cu versorii: $\vec{i}$ pentru direcția x , $\vec{j}$ pentru direcția y și $\vec{k}$ pentru direcția z) atunci: $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z$ adică $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$. a_x , a_y și a_z sunt proiecțiile vectorului $\vec{a}$ pe cele trei axe și $a_x = \vec{a} \cdot \vec{i}$, $a_y = \vec{a} \cdot \vec{j}$ iar $a_z = \vec{a} \cdot \vec{k}$ sau, $a_x = a \cos \alpha$, $a_y = a \cos \beta$ și $a_z = a \cos \gamma$, unde $\cos \alpha$, $\cos \beta$ și $\cos \gamma$ sunt cosinuzii directori ai direcției descrise de vectorul $\vec{a}$, i.e. cosinusul unghiurilor dintre $\vec{a}$ cu fiecare dintre cele trei axe.



a_x , a_y și a_z se mai numesc și coordonatele vectorului $\vec{a}$ pe cele trei axe⁵.

În cazul în care cunoaștem proiecțiile vectorului pe axele de coordonate putem folosi o formă simplificată de scriere: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, expresie care se citește: vector $\vec{a}$ de coordonate a_x , a_y și a_z . Vom folosi în continuare această formă simplificată pentru descrierea operațiilor cu vectori.

Reluăm toate operațiile cu vectori, folosind vectorii sub forma $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, ...

⁵ Pe de altă parte, cosinuzii directori determină o direcție în spațiu. Toate punctele de pe acea direcție pot fi obținute dând valori parametrului t din expresia $(t \cos \alpha, t \cos \beta, t \cos \gamma)$.