Ecuațiile liniarizate ale magnetohidrodinamicii

Sa consideram un sistem plasmatic in prezenta unui camp magnetic si supus influentei campului gravitational. Acest sistem este usor perturbat. Micile perturbatii in sistemul ecuatiilor MHD sunt de forma:

$$\left.\begin{aligned} \vec{v} &= 0 + \vec{v}_1(\vec{r},t) \\ \vec{B} &= \vec{B}_0(\vec{r}) + \vec{B}_1(\vec{r},t) \\ \rho &= \rho_0(\vec{r}) + \rho_1(\vec{r},t) \\ p &= p_0(\vec{r}) + p_1(\vec{r},t) \end{aligned}\right\}$$

Unde cu $\rho_0(\vec{r}), p_0(\vec{r}), \vec{B}(\vec{r})$ am notat marimile neperturbate. In stare initiala, stare neprturbata $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0; \vec{v}_0 = 0\right)$, ecuatia caracteristica MHD este ecuatia magnetostaticii:

$$\nabla p_0 = \vec{j}_0 \times \vec{B}_0 + \rho_0 \vec{g}$$

In stare perturbata (conform teoriei micilor perturbatii $\equiv$ neglijam termenii care contin produsele a doua sau mai multe cantitati cu indicele"1") ecuatiile MHD capata forma:

ecuația de continuitate: $$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho_0 \vec{v}_1\right) = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

ecuația de mişcare: $$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + \frac{\nabla \times \vec{B}_1}{\mu} \times \vec{B}_0 + \frac{\nabla \times \vec{B}_0}{\mu} \times \vec{B}_1 + \rho_1 \vec{g} \qquad \textbf{(2)}$$

ecuația liniilor de câmp: $$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0);\ \nabla \vec{B}_1 = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

ecuația de stare: $$\frac{\partial p_1}{\partial t} + \vec{v}_1 \nabla p_0 = -\gamma p_0 \nabla \vec{v}_1 \qquad \textbf{(4)}$$

Obținerea ecuației de propagare a undelor MHD, implica aplicarea operatorului $\frac{\partial}{\partial t}$ ecuatiei de miscare . Tinand cont de (3-4) rezulta imediat ca:

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + \frac{\nabla \times \vec{B}_1}{\mu} \times \vec{B}_0 + \frac{\nabla \times \vec{B}_0}{\mu} \times \vec{B}_1 + \rho_1 \vec{g} \,\bigg|\, \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} = -\nabla \frac{p_1}{\partial t} + \frac{1}{\mu}\left(\nabla \times \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t}\right) \times \vec{B}_0 + \frac{1}{\mu}(\nabla \times \vec{B}_0) \times \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1}{\partial t}\vec{g}$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} = \nabla[\vec{v}_1 \nabla p_0 + \gamma p_0 \nabla \vec{v}_1] + \frac{1}{\mu}\left[\nabla \times \nabla \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0)\right] \times \vec{B}_0 + \frac{1}{\mu}\left[\vec{v}_1 \times \vec{B}_0\right] \times \nabla \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0) - \nabla(\rho_0 \vec{v}_1)\vec{g} \tag{5}$$

Unde sonice

Alegem cea mai simplă problemă: $\vec{B}_0 = 0; \vec{g} = 0$.

In aceste conditii $\Rightarrow \nabla p_0 = 0 \Rightarrow p_0 = const$ => echilibru uniform, neexistând restricții legate de densitate $\Rightarrow \nabla \vec{\rho}_0 = const$.

Ecuația (5) devine:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} = \gamma p_0 \nabla(\nabla \vec{v}_1) \ \Big| \nabla \tag{6}$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\nabla \vec{v}) = \gamma p_0 \nabla^2 (\nabla \vec{v}) \ \Big| \frac{1}{\rho_0}$$

Introducem notatia:

$\nabla \vec{v} = \Delta$

iar ecuatia de propagare capata forma:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta) = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \nabla^2 (\Delta) = C_S^2 \nabla^2 (\Delta) \tag{7}$$

unde $C_S = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$ este viteza sunetului (10Km/sin fotosfera si 200km/s in corona solara). Astfel:

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta) = C_S^2 \nabla^2 (\Delta)} \tag{8}$$

reprezinta ecuatia de propagare a undelor sonice. In cazul in care $\Delta = \nabla \vec{v} \neq 0$ undele sonice sunt compresive. Cautam o solutie de forma undelor plane

$$\Delta = \Delta_0 e^{i(\omega t - \vec{K}\vec{r})} \quad ; \ \Delta_0 = const \tag{9}$$

unde $\vec{K}\vec{r} = kx + ly + mz$;- vector de undă iar $\vec{r} = (x, y, z)$ - vector de poziție

Deoarece

$$\frac{\partial}{\partial t} = i\omega; \ \frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\omega^2; \ \frac{\partial}{\partial x} = -ik; \ \frac{\partial^2}{\partial x^2} = k^2; \ ... \ K^2 = k^2 + l^2 + m^2$$

Ecuatia (9) devine:

$$-\omega^2(\Delta) = -K^2C_S^2\nabla^2(\Delta) \Rightarrow (\omega^2 - K^2C_S^2\nabla^2)(\Delta) = 0 \qquad \textbf{(10)}$$

Deoarece $\Delta = 0 \Rightarrow$ soluții triviale rezulta imediat ca

$$\boxed{\omega^2 - K^2C_S^2 = 0} \qquad \textbf{(11)}$$

este ecuația de dispersie $\omega = \omega(\vec{K})$ pentru undele sonice .

Stiind ca viteza de fază defineste rapiditatea undei individuale

$$C_f = \frac{\omega}{K} = \pm C_S \qquad \textbf{(12)}$$

iar viteza de grup defineste viteza şi direcția transportului de informație şi energie

$$\vec{C}_g = \frac{\partial\omega}{\partial\vec{K}} = \left(\frac{\partial\omega}{\partial k}, \frac{\partial\omega}{\partial l}, \frac{\partial\omega}{\partial m}\right) \qquad (13)$$

avand in vedere (11) se poate stabili rapid, relatia de legatura dinter cele doua viteze:

$$\omega^2 = K^2C_S^2 = (k^2 + l^2 + m^2)C_S^2$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial\vec{K}} = \frac{C_S^2}{\omega}(k,l,m) = \frac{C_S^2}{\omega}\vec{K} = \frac{C_S^2}{\omega}K\hat{e}_k = \pm c_S\hat{e}_k = c_f\hat{e}_k$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{C}_g = \pm C_S\hat{e}_k = C_f\hat{e}_k} \qquad \textbf{(14)}$$

Revenind, putem obține ecuația de dispersie a undelor sonore, direct din sistemul ecuațiilor magnetohidrodinamicii liniarizate (**1–4**) cu $\vec{B}_0 = 0$ şi $\vec{g} = 0$, utilizând reprezentarea Fourier (raționamentul este valabil numai în cazul echilibrului uniform).

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t} + \nabla(\rho_0 v_1) = 0$$

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t} = -\rho_0\nabla\vec{v}_1 \Rightarrow i\omega\rho_1 = \rho_0 i\vec{k}\vec{v}_1 \Rightarrow \frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{\vec{k}\vec{v}_1}{\omega} \qquad \textbf{(15)}$$

$$\rho_0\frac{\partial\vec{v}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 \Rightarrow i\omega\rho_0\vec{v}_1 = ip_1\vec{k} \Rightarrow \vec{v}_1 = \frac{p_1}{\rho_0\omega}\vec{k} \qquad \textbf{(16)}$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = -\gamma p_0\nabla\vec{v}_1 \Rightarrow i\omega p_1 = \gamma p_0 i\vec{k}\vec{v}_1 \Rightarrow \frac{p_1}{p_0} = \gamma\frac{(\vec{k}\vec{v}_1)}{\omega} \qquad \textbf{(17)}$$

Combinand (15) cu (17) obtinem:

$$\frac{p_1}{p_0} = \gamma\frac{\rho_1}{\rho_0} \Rightarrow p_1 = \gamma\frac{p_0}{\rho_0}\rho_1 \Rightarrow p_1 = C_S^2\rho_1 \qquad \textbf{(18)}$$

Din (**16**) se poate observa faptul că viteza este paralelă cu $\vec{k}$, ceea ce înseamnă că mişcările sunt aliniate direcţiei de propagare, deci unda este longitudinală si deoarece $(\vec{k}\vec{v}_1) \neq 0$ din (**15**) şi (**17**) se poate concluziona ca mişcarea este compresivă, compresivitatea fiind o proprietate caracteristică undelor sonore. Ecuatiea de dispersie se poate obtine eliminand succesiv $(\vec{k}\vec{v}_1) \neq 0$ din (15-17):

$$\vec{v}_1 = \frac{p_1}{\rho_0 \omega}\vec{k} \,\Big|\, \vec{k}$$

$$\begin{cases} (\vec{k}\vec{v}_1) = \dfrac{p_1}{\rho_0\omega}\vec{k}\vec{k} = -\dfrac{p_1}{\rho_0\omega}K^2(\hat{e}_k\hat{e}_k) = \dfrac{p_1\omega}{\rho_0}\dfrac{K^2}{\omega^2} = \dfrac{p_1}{\rho_0}\dfrac{K^2}{\omega} = \dfrac{p_1\omega}{\rho_0 C_S^2} \\ (\vec{k}\vec{v}_1) = \dfrac{p_1\omega}{\rho_0} = \dfrac{\omega}{\rho_0}\dfrac{p_1}{C_S^2} \end{cases}$$

$$\frac{\omega}{\rho_0}\frac{p_1}{C_S^2} = \frac{p_1}{\rho_0}\frac{K^2}{\omega} \Rightarrow \omega^2 = K^2 C_S^2$$

Undele Alfvén

Păstrând limitele raţionamentului precedent, ne punem problema ce se întâmplă în cazul prezenţei câmpului magnetic.

$$\begin{cases} \vec{B}_0 = B_0\hat{e}_z = B_0\hat{e}_z \\ p_0 = 0 \\ \vec{g} = 0 \\ \rho_0 \neq 0 \end{cases}$$

$\vec{B}_0 = B_0\hat{e}_z = B_0\hat{e}_z$ - anizotropie în raport cu Ox

$\rho_0 \neq 0$ - care ne permite să vedem efectul câmpului magnetic fără a ne interesa undele sonore

Pare plauzibil, deoarece câmpul magnetic are o direcţie care va fi reflectată în mişcarea ondulatorie care rezultă.

Presupunem că nu avem variaţii în densitate şi presiune $\begin{cases} p_1 = 0 \\ \rho_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ (**1**)

$$\Rightarrow (\vec{k}\vec{v}_1) = 0 \qquad (\mathbf{17})$$

Liniarizăm ecuaţia (**5**):

$$-\rho_0\omega^2\vec{v}_1 = -[\vec{k}\times\vec{k}\times(\vec{v}_1\times\vec{B}_0)]\times\frac{\vec{B}_0}{\mu} \quad \textbf{(18)}$$

$$\vec{k}\times(\vec{v}_1\times\vec{B}_0) = (\vec{k}\cdot\vec{B}_0)\vec{v}_1 - (\vec{k}\cdot\vec{v}_1)\vec{B}_0 = (\vec{k}\cdot\vec{B}_0)\vec{v}_1$$

$$\vec{k}\times\vec{k}\times(\vec{v}_1\times\vec{B}_0) = \vec{k}\times(\vec{k}\cdot\vec{B}_0)\vec{v}_1 = (\vec{k}\cdot\vec{B}_0)\cdot\vec{k}\times\vec{v}_1$$

$$\Rightarrow\ -\rho_0\omega^2\vec{v}_1 = \frac{1}{\mu}(\vec{k}\cdot\vec{B}_0)(\vec{k}\times\vec{v}_1)\times\vec{B}_0 = \frac{1}{\mu}(\vec{k}\cdot\vec{B}_0)[(\vec{k}\cdot\vec{B}_0)^2\vec{v}_1 - (\vec{k}\cdot\vec{B}_0)(\vec{v}_1\cdot\vec{B}_0)\vec{k}]$$

Observăm că (**18**) că: $\vec{v}_1\cdot\vec{B}_0 = 0 \Rightarrow \vec{v}_1\cdot\vec{B}_0(x)\cdot\hat{e}_z = 0 \Rightarrow \vec{v}_1\cdot\hat{e}_z = 0$

$$\Rightarrow\ -\rho_0\omega^2\vec{v}_1 = -\frac{1}{\mu}(\vec{k}\cdot\vec{B}_0)^2\vec{v}_1 \Rightarrow \rho_0\omega^2 = \frac{(\vec{k}\cdot\vec{B}_0)^2}{\mu} \Rightarrow \omega^2 = \frac{(\vec{k}\cdot\vec{B}_0)^2}{\rho_0\mu} \quad \textbf{(19)}$$

Definim viteza viteza Alfvén:

$$C_A^2 = \frac{B_0^2}{\rho_0\mu} \quad \textbf{(20)}$$

Astfel (**19**) devine:

$$\omega = \pm C_A(\vec{k}\cdot\hat{e}_z) = \pm mC_A \quad \textbf{(21)}$$

unde am ținut cont că: $\vec{k}\cdot\vec{B}_0 = (\vec{k}\cdot\hat{e}_z)B_0 = mB_0$; $\vec{k} = k\vec{e}_x + l\vec{e}_y + m\vec{e}_z$

Relația (**21**) descrie undele Alfvén care sunt anizotrope datorită termenului

$$(\vec{k}\cdot\vec{B}_0) \Rightarrow \vec{v}_1 \perp \begin{cases}\vec{B}_0\\ \vec{k}\end{cases} \Rightarrow \text{ sunt transversale}$$

$$\left.\begin{array}{l}\nabla\vec{v}_1 = 0\\ \rho_1 = 0;\ p_1 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ mişcarea este incompresibilă}$$

$$\Rightarrow\ \vec{k}\cdot\vec{e}_z = K(\vec{k}\cdot\vec{e}_z) = K\cos\theta$$

$$C_f = \frac{\omega}{K} = \pm\frac{C_A(\vec{k}\cdot\vec{e}_z)}{K} = \pm\frac{C_A K\cos\theta}{K} = \pm C_A\cos\theta$$

deci viteza de fază: $C_f = C_A\cos\theta$ (**22**)

$\vec{C}_g = \left(\frac{\partial\omega}{\partial k},\frac{\partial\omega}{\partial l},\frac{\partial\omega}{\partial m}\right) = C_A\cdot\vec{e}_z$ - se va propaga în lungul liniilor (**23**)

câmpului magnetic în echilibru

Facem acelaşi studiu dar pentru efectul câmpului magnetic şi al presiunii gazului $(\vec{g}=0)$.

$$\begin{cases} \vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z \\ p_0 = const \end{cases}$$

Liniarizarea ecuației (**5**) şi obținem:

$$-\rho_0 \omega^2 \vec{v}_1 = -\gamma p_0 \vec{k}(\vec{k}\cdot\vec{v}_1) - \frac{B_0^2}{\mu}\left[\vec{k}\times\left\{\vec{k}\times(\vec{v}_1\cdot\vec{e}_z)\right\}\right]\times\vec{e}_z \qquad \textbf{(24)}$$

$$\left|\vec{e}_z\cdot(24) \;\Rightarrow\; \omega^2 v_z = C_S^2 m(\vec{k}\cdot\vec{v}_1) \qquad \textbf{(25)}\right.$$

$$\left|\vec{k}\cdot(24) \;\Rightarrow\; \omega^2(\vec{k}\cdot\vec{v}_1) = C_S^2 K^2(\vec{k}\cdot\vec{v}_1) + C_A^2\vec{k}\left[\vec{k}\times\left\{\vec{k}\times(\vec{v}_1\cdot\vec{e}_z)\right\}\right]\times\vec{e}_z \qquad \textbf{(26)}\right.$$

$$\Rightarrow\; \omega^2(\vec{k}\cdot\vec{v}_1) = (C_S^2 + C_A^2)K^2(\vec{k}\cdot\vec{v}_1) - mk^2C_A^2 v_z \qquad \textbf{(27)}$$

(**25**) şi (**27**) sunt ecuații liniare în v_z (componenta vitezei în lungul lui $\vec{B}_0$) şi $(\vec{k}\cdot\vec{v}_1)$ este divergența vitezei perturbatoare care este măsură a compresibilității plasmei. Sistemul fiind neomogen, soluții există dacă determinantul coeficienților este egal cu zero, ceea ce ne dă ecuația de dispersie:

$$\begin{vmatrix} \omega^2 & -C_S^2 m \\ mK^2C_A^2 & \omega^2 - K^2(C_S^2 + C_A^2) \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow\; \omega^4 - K^2(C_S^2 + C_A^2)\omega^2 + K^2m^2C_A^2C_S^2 = 0 \qquad \textbf{(28)}$$

care este ecuația de dispersie pentru modurile magnetoacustice

Dacă:

$$\vec{B}_0 = 0 \;\Rightarrow\; C_A^2 = 0 \;\Rightarrow\; \omega^4 - K^2C_S^2\omega^2 = 0$$

- dacă $\omega^2 \neq 0 \;\Rightarrow\; \omega^2 = K^2C_S^2$ şi astfel modurile magnetohidroacustice se reduce la unda sonoră

$$\rho_0 = 0 \;\Rightarrow\; C_S^2 = 0 \;\Rightarrow\; \omega^4 - K^2C_A^2\omega^2 = 0$$

- dacă $\omega^2 \neq 0 \;\Rightarrow\; \omega^2 = K^2C_A^2$ care nu este unda Alfvén anizotropă discutată anterior

$$\left|\vec{k}\cdot((24)\times\vec{e}_z) \;\Rightarrow\right.$$

$$\omega^2[\vec{k}\cdot(\vec{v}_1\times\vec{e}_z) = C_S^2(\vec{k}\cdot\vec{v}_1)\cdot\vec{k}\cdot(\vec{k}\times\vec{e}_z)+C_A^2m^2\left[\vec{k}\cdot(\vec{v_1}\times\vec{e}_z)\right]-$$

$$-C_A^2m\vec{v}_z\vec{k}\cdot(\vec{k}\times\vec{e}_z)-C_A^2(\vec{k}\cdot\vec{v}_1)\cdot m\overline{k}\cdot(\vec{e}_z\times\vec{e}_z)+$$

$$+C_A^2(\vec{k}\cdot\vec{v}_1)\cdot\overrightarrow{k}\cdot(\vec{k}\times\vec{e}_z)$$

$$\Rightarrow\ (\omega^2-m^2C_A^2)\left\{\vec{k}\cdot(\vec{v}_1\times\vec{k})\right\}=0 \qquad \textbf{(29)}$$

$$\Rightarrow\ \omega^2=m^2C_A^2 \qquad \text{adică ecuația de dispersie a UVA} \qquad \textbf{(30)}$$

Soluția ecuației (**28**):

$$\omega^2=\frac{k^2}{2}(C_S^2+C_A^2)\pm\frac{k^2}{2}\left[(C_S^2+C_A^2)^2-4C_S^2C_A^2\cos\theta\right]^{\frac{1}{2}} \qquad \textbf{(31)}$$

unde am ținut cont că:

$$\begin{cases}\vec{k}\cdot\vec{e}_z=(\vec{k}\cdot\vec{e}_x+l\cdot\vec{e}_y+l\cdot\vec{e}_z)\\ \vec{k}\cdot\vec{e}_z=K(\vec{e}_x\cdot\vec{e}_z)=K\cos\theta\end{cases}\Rightarrow\ m=K\cos\theta$$

pentru $\theta=0\ \Rightarrow\ m=K\ \Rightarrow\ \vec{K}\,\Box\,\vec{B}_0$ deci propagarea se face paralel cu $\vec{B}_0$

$$C_f=\frac{\omega}{K}$$

$$\omega^2=\begin{cases}\dfrac{K^2}{2}(2C_S^2)=K^2C_S^2\\[2ex] \dfrac{K^2}{2}(2C_A^2)=K^2C_A^2\end{cases}$$

$$\omega^2=\frac{k^2}{2}\left(C_S^2+C_A^2\right)\pm\frac{k^2}{2}\left(C_S^2-C_A^2\right)$$

$$C_f^2=\frac{\omega}{K}=\begin{cases}C_S^2\ \Rightarrow\ C_{f(+)}^2=\max(C_S^2,C_A^2)\\ C_A^2\ \Rightarrow\ C_{f(-)}^2=\min(C_S^2-C_A^2)\end{cases}$$

datorită expresiei de sub radical:

$$\left(C_S^2+C_A^2\right)^2-4C_S^2C_A^2=\begin{cases}\left(C_S^2-C_A^2\right)^2\\ \left(C_A^2-C_S^2\right)^2\end{cases}$$

pentru $\theta=\dfrac{\pi}{4}\ \Rightarrow\ \begin{cases}C_{f(+)}^2=\dfrac{C_S^2+C_A^2}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{C_S^2+C_A^2}\\[2ex] C_{f(-)}^2=\dfrac{C_S^2+C_A^2}{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{C_S^2+C_A^2}\end{cases}$

pentru $\theta = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow m = 0 \Rightarrow \begin{cases} C_{f(+)}^2 = C_S^2 + C_A^2 \\ C_{f(-)}^2 = 0 \end{cases}$

deci unde lente ca şi cele Alfvén şi de aceea nu se pot propaga peste câmpul magnetic.