MAGNETOHIDRODINAMICA

1. INTRODUCERE

Ce este magnetohidrodinamica?

Magnetohidrodinamica (MHD) este dinamica fluidelor electroconductoare. Tipurile de fluide electroconductoare includ : metale lichide (mercur, galiu, sodiu sau fier topit) şi gaze ionizate (uneori numite şi plasme) ca cele din atmosfera solară. Trebuie precizat faptul că nu toate fenomenele observate în plasme pot fi descrise cu ajutorul teoriei fluidelor şi de aceea se impune luarea în considerare a particulelor individuale , în special în plasmele rarefiate.

Magnetohidrodinamica ca ramură a fizicii cuprinde o arie extinsă de aplicații:

- Miezul exterior al Pământului este compus în special din fier topit ceea ce înseamnă că putem presupune că aceasta este sursa ce generează câmpul magnetic terestru. Studiul şi rezolvarea ecuațiilor MHD ne permite explicarea fenomenului de schimbare treptată în timp a câmpului magnetic cît şi fenomenul rar şi neregulat al inversării polilor. Acest domeniu, alături de cel al descrierii ionosferei focalizează cercetările curente în MHD.
- Soarele fiind alcătuit în mare parte din hidrogen ionizat focalizează interesul MHD în două direcții: prima este cea a zonei convective în care şi sub care este generat câmpul magnetic solar şi în care, mecanismul de bază (interacțiunea dintre câmpul magnetic şi un fluid electroconductor în mişcare) este similar celui existent în miezul Pământului şi o a doua este atmosfera solară (cromosfera şi coroana solară) care este mult mai puțin densă decât zona convectivă. Aici o problemă majoră este cea a explicării incălzirii coroanei solare la temperaturi de ordinul 10^6K în timp ce fotosfera (regiunea învecinată ce separă zona convectivă de cromosferă) se ăncălzeşte doar cu câteva sute de grade K.
- În industrie MHD are o serie de aplicații legate de utilizarea forțelor electromagnetice în pomparea metalelor lichide (sistemele de răcire in instalațiile de producere a energiei nucleare), de influențare a formei de curgere a metalelor topite şi implicit controlul modului de solidificare dar şi in asigurarea levitației probelor de metal topit pentru a elimina orice formă de contact cu incintele. Aceasta din urmă este utilizată în procesele de fuziune (scopul constă în obținerea unor energii imense din fuziunea hidrogenului in heliu-procese care au loc in Soare) deoarece nici un material cunoscut nu poate rezista la temperaturi atât de mari. Oricum energiile utilizate pentru menținerea hidrogenului ionizat în incinte magnetice şi asigurarea unor temperaturi suficient de înalte, nu sunt încă egale cu energiile rezultate din procese de fuziune de scurtă durată.

Ecuatiile de baza ale MHD

Ecuatiile Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c \ , \tag{1.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \ , \tag{1.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \ , \tag{1.3}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \ , \tag{1.4}$$

unde in mediu izotrop

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \qquad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \ , \qquad (1.5, 6)$$

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \mathrm{Fm}^{-1}, \qquad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \mathrm{Hm}^{-1} \cdot \ c = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2} = 2.998 \times 10^8 \mathrm{ms}^{-1}.$$

Ecuatia Navier-Stokes

Este ecuația ce guvernează curgerea unui fluid (ecuația momentului mişcării):

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right] = -\nabla p + \nu \ \nabla^2 \vec{u} + alte \ forte$$

unde ρ este densitatea fluidului, $\vec{u}$ este viteza sa, p est presiunea, iar ν este vâscozitatea cinematică. Dacă fluidul conține un anumit număr de sarcini electrice per unitatea de volum, atunci forța electrică per unitatea de volum va fi:

$$\rho_c \cdot \vec{E}$$

iar când o densitate de curent $\vec{j}$ "curge" prin fluid, este prezentă o forță per unitatea de volum de tipul:

$$\vec{j} \times \vec{B}$$

În aceste condiții ecuația Navier-Stokes devine:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right] = -\nabla p + \nu \ \nabla^2 \vec{u} + \rho_c \cdot \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} + alte \ forte \tag{1.7}$$

Legea lui Ohm

Curentul ce curge printr-un conductor este proportional cu campul electric total.. In plus fata de campul electric E ce actioneaza in fluidul in repaus, in cazul unui fluid in miscare cu viteza u in prezenta unui camp magbetic B, apare un camp suplimentar **u×B**, astfel:

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \qquad (1.8)$$

Aproximatia Magnetohidrodinámica

Ecuatiile introduse mai sus sunt capabile sa descrie o gama larga de fenomene. Deoarece in aplicatiile de interes

- vitezele sunt mult mai mici decat viteza luminii. $u << c$
- fenomenele sunt suficient de lente astfel incat quasineutralitatea plasmelor (n_e=n_i)sa fie asigurata (i.e este neglijabila separarea de sarcina in fluidele plasmatice)

$$T = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{-1} \approx \frac{L}{u} >> \frac{1}{\omega_{pe}}; \quad T = scala\ temporala;$$

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{ne^2}{m_e \varepsilon_0}} = frecventa\ plasmei\ electronice$$

- lungimea Debye si giroraza sunt mici in comparatie cu dimensiunea scalei spatiale

$$\left(L \approx \frac{1}{\nabla}\right) \Rightarrow \lambda_D << L; \quad r_i << L$$

- plasmele sunt suficient de colizionale astfel incat:

$$\nu_{ii} = frecventa\ de\ ciocnire\ ionica >> \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial t}$$

(ceea ce inseamna *aproximatia MHD ideale*) se impune necesitatea introducerii unor simplificari substantiale ale acestor ecuatii.

Sa presupunem ca marimile tipice in fluidul electroconductor sunt:

U - viteza caracteristică a fluidului

T – scala temporală

L – scala lungimilor

B – intensitatea caracteristică a câmpului magnetic

E - intensitatea caracteristică a câmpului electric

$$\Rightarrow U = \frac{L}{T}$$

Din ecuatia (1.2) rezulta imediat:

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \Rightarrow \frac{E}{L} \sim \frac{B}{T} \Rightarrow \frac{E}{B} \sim \frac{L}{T} = U$$

$$\frac{E}{L} \sim \frac{B}{T} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{E}{B} \sim \frac{L}{T} = U \tag{1.9}$$

Luind in considerare ec.1.4 obtinem:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\frac{|\partial \mathbf{D}/\partial t|}{|\nabla \times \mathbf{H}|} \sim \frac{D/T}{H/L} = \frac{\epsilon_0 E/T}{B/\mu_0 L} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{E}{B}\frac{L}{T} \sim \frac{1}{c^2}\frac{L^2}{T^2} = \frac{U^2}{c^2}.$$

Pentru viteze mici in comparative cu viteza luminii (U<< c), curentul de deplasare $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ poate fi neglijat, iar (1.4) devine:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}. \tag{1.10}$$

Sa consideram acum. raportul ponderii fortelor in (1.7). Din (1,1)

$$|\rho_c| \sim \frac{D}{L}, \tag{1.11}$$

iar din (1.10)

$$|\mathbf{j}| \sim \frac{H}{L}. \tag{1.12}$$

Utilizand (1.9), (1.11) si (1.12) rezulta:

$$\frac{|\rho_c \mathbf{E}|}{|\mathbf{j} \times \mathbf{B}|} \sim \frac{(D/L)E}{(H/L)B} = \frac{\epsilon_0 E^2}{B^2/\mu_0} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{E^2}{B^2} \sim \frac{U^2}{c^2}.$$

deci forta de natura electrica poate fi neglijata in raport cu forta Lorentz, iar ec.(1.7) devine:

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right) = -\nabla p + \rho\nu\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{j}\times\mathbf{B} + \text{other forces}. \tag{1.13}$$

Forta Lorentz, in mod explicit este:

$$F_L = \vec{j} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu}(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} = \underbrace{(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\frac{\vec{B}}{\mu}}_{\Downarrow} - \underbrace{\nabla\left(\frac{B^2}{2\mu}\right)}_{\Downarrow}$$

tensiune magnetica ***presiune magnetica***

Daca vom lua in considerare prezenta gravitatiei si a vascozitatii dinamice:

$$\vec{f} = -\rho\vec{g} + \rho\nu\left(\nabla^2\vec{u} + \frac{1}{3}\nabla(\nabla\cdot\vec{u})\right)$$

ecuatia (1.13) devine:

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}\right)=-\rho\vec{g}+\rho\nu\left(\nabla^2\vec{u}+\frac{1}{3}\nabla(\nabla\cdot\vec{u})\right)+(\vec{B}\cdot\nabla)\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\nabla\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right)}$$

Ecuatia inductiei magnetice

Avand in vedere simplificarile facute anterior, putem elimina E din setul de ecuatii combinand (1.2), (1.3), (1.8) si (1.10). Utilizand $\vec{B}=\mu_0\vec{H}$ si legea lui Ohm (1.8), relatia (1.10) devine:

$$\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\mathbf{B} \;=\; \sigma(\mathbf{E}+\mathbf{u}\times\mathbf{B}),$$

sau

$$\eta\nabla\times\mathbf{B} \;=\; (\mathbf{E}+\mathbf{u}\times\mathbf{B}), \qquad (1.14)$$

unde

$$\eta \;=\; \frac{1}{\mu_0\sigma}, \qquad (1.15)$$

poarta numele de *difuzivitate magnetica*.

Aplicand operatorul Rotational ec. (1.4) ≡ ∇× (1.14) obtinem:

$$\nabla\times(\eta\nabla\times\mathbf{B}) \;=\; \nabla\times(\mathbf{E}+\mathbf{u}\times\mathbf{B}).$$

$$\Downarrow$$

$$\eta\Big(\nabla(\nabla\cdot\mathbf{B}) \;-\nabla^2\mathbf{B}\Big) \;=\; \nabla\times\mathbf{E}+\nabla\times(\mathbf{u}\times\mathbf{B}).$$

si utilizand (1.2) si (1.3) rezulta:

$$-\eta\nabla^2\mathbf{B} \;=\; -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}+\nabla\times(\mathbf{u}\times\mathbf{B}),$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \;=\; \nabla\times(\mathbf{u}\times\mathbf{B})+\eta\nabla^2\mathbf{B}.}$$

(1.16)

ecuatie cunoscuta sub numele de *ecuatia inductiei magnetice* si care descrie evolutia B. Primal termen din dreapta ec.(1.16) este cel care subliniaza interactiunea dintre campul magnetic si campul curgerii (*termenul convectiv*), fiid singurul generador de camp, in timp ce al doilea termen este unul *difuziv*. Vom vedea ca in absenta curgerii u = 0, termenul difuziv va conduce la atenuarea masiva a campului magnetic. Sa stabilim ponderea celor doi termeni in ecuatia inductiei:

$$\left|\frac{\nabla\times\left[\vec{u}\times\vec{B})\right]}{\eta\nabla^2\vec{B}}\right| \sim \frac{UB}{L}\cdot\frac{L^2}{\eta B} = \frac{UL}{\eta} \Rightarrow R_m = \frac{U_0 L_0}{\eta}$$

R_m este numarul Reynolds magnetic.

In cazul fluidelor plasmatice izotrope, difuzivitatea magnetica este uniforma iar R_m va fi masura cuplajului intre curgere si campul magnetic.

Limita difuzivitatii:

Daca $R_m \ll 1$ termenul convectiv poate fi neglijat in raport cu cel difuziv (cuplaj slab, cazul plasmelor de laborator) ecuatia inductiei devine:

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \eta\nabla^2\vec{B}$$

ecuatie cunoscuta sub numele *de ecuatia difuziei*. Ea pune in evidente faptul ca variatiiile campului pe o scala spatiala L este sunt distruse intr.-un interval de timp corespunzator <u>scalei temporale a difuziei:</u>

$$\tau_d = \frac{L^2}{\eta}$$

Obsevamca pentru lungimi de scala mici, fenomenal de difuzie al campului magnetic este rapid. In cazul plasmelor complet ionizate:

$$\tau_d \approx 10^{-9} L^2 T^{3/2}; \langle L\rangle = m, \langle T\rangle = K$$

Spre exemplu, in plasma coronala T=10^6K, iar scala tipica de lungime este 1Mm=10^6m ceea ce inseamna ca :

$$\tau_d \approx 10^{-9}10^{12}10^9 = 10^{12}s = 30.000 ani$$

Eliberarile masive de energie magnetica (*solar flares*) au loc intr.-un interval de scala temporala cuprins intre 100 si 1000 s, ceea ce inseamna ca dimensiunea lor spatiala este relativ mica:

$$\tau_d = 10^2 \approx 10^{-9} L^2 10^9 \rightarrow L \approx 10 - 100m$$

Limita conductiei perfecte

Daca $\boldsymbol{R_m >> 1}$ termenul difuziv din ecuatia inductiei este neglijabil in raport cu cel convectiv (cuplaj puternic, cazul plasmelor cosmice), deci

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B})$$

ceeea ce conduce la aplicabilitatea legilor legate de conservare a *fluxului magnetic* si a *inghetarii campului magnetic*.

Solutii stationare

Pentru a aprecia ponderea termenilor difuzivi si advectivi in 1.1.6 sa rezolvam problema stationara:

$$\nabla \times \left(\vec{u} \times \vec{B}\right) + \eta \nabla^2 \vec{B} = 0$$

Alegem cea mai simpla forma a campului curgerii $\vec{u} = u \nabla x$ si avand in vedere relatia

$$\nabla \times \left(\vec{u} \times \vec{B}\right) = \vec{u}\left(\nabla \cdot \vec{B}\right) - \vec{B}\left(\nabla \cdot \vec{u}\right) + \left(\vec{B} \cdot \nabla\right)\vec{u} - \left(\vec{u} \cdot \nabla\right)\vec{B}$$

rezulata imediat ca:

$$\nabla \times \left(\vec{u} \times \vec{B}\right) = -u \frac{\partial \vec{B}}{\partial x}$$

Notand $U = \dfrac{u}{\eta}$ obtinem ecuatia inductiei pentru solutii stationare:

$$U \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} = \nabla^2 \vec{B}$$

In cazul in care $\nabla \times \vec{B} = 0$ (anularea densitatii de curent), $\vec{B} = -\nabla \varphi;\ \varphi = \varphi(x, y, z)$ astfe lincat:

$$U \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \nabla^2 \varphi$$

Pentru U=0 se obtine $\nabla^2 \varphi = 0$ a carei solutie simpla ar fi $\varphi_0 = \dfrac{1}{r}$ in coordonate sferice (r,θ,z) insa fara semnificatie fizica, deoarece ar duce la concluzia existentei ”campului magnetic monopolar ” $\vec{B} = \dfrac{\hat{r}}{r^2}$. O solutie acceptabila ar rezulta din diferentierea lui φ_0

$$\varphi_{,d} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} = -\frac{z}{r^3} = -\frac{\cos\theta}{r^2}$$

care conduce la campul magnetic dipolar.

Considerand ca $\varphi(x,y,z) = h(x,y,z)\exp(kx)$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \left(\frac{\partial h}{\partial x} + kh\right)e^{kx}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + 2k\frac{\partial h}{\partial x} + k^2 h\right)e^{kx}$$

Deci

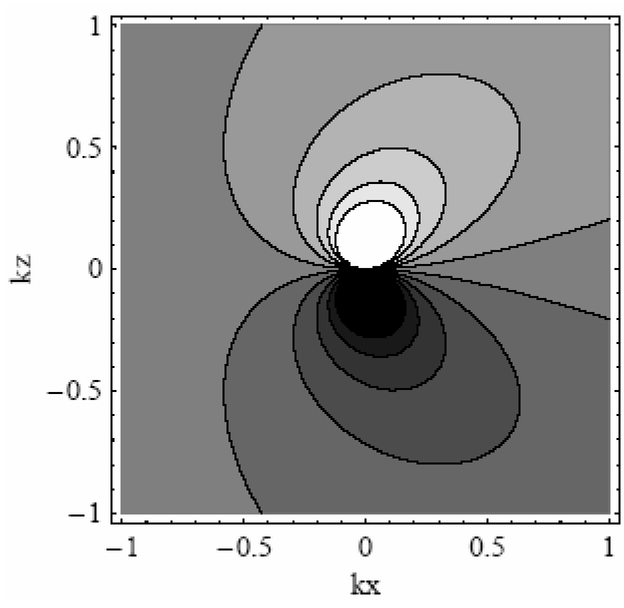
$$\nabla^2 \varphi = u\left(\frac{\partial h}{\partial x} + kh\right)e^{kx} \quad notam \quad k = u/2 \Rightarrow \nabla^2 h = -k^2 h$$

A carei solutie este:

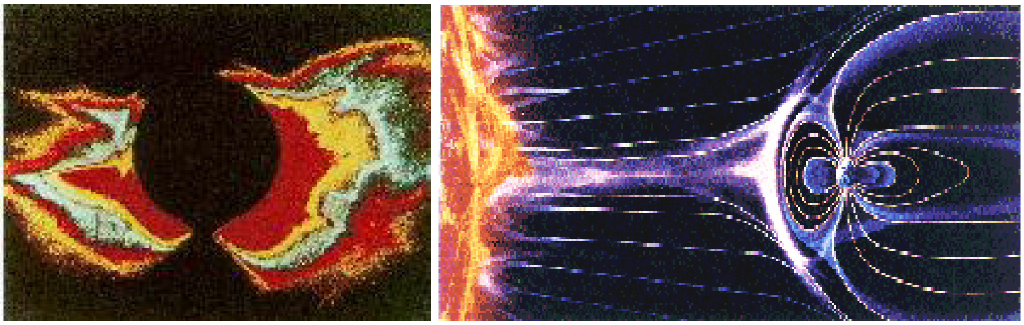
$$h = \frac{e^{-kx}}{r}$$

care pentru x→0 arata ca si φ_0 neavand semnificatie fizica., insa pentru campul dipolar orientat dupa Oz avem:

$$h = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{-kr}}{r}\right) = \frac{z(kr+1)e^{-kr}}{r^3} \Rightarrow \varphi = \frac{z(kr+1)e^{k(x-r)}}{r^3}$$



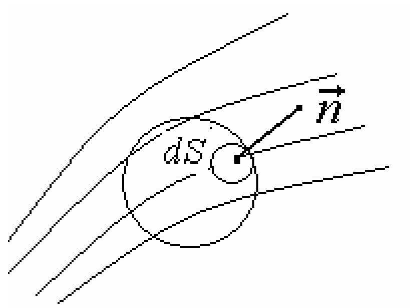
Observam ca pentru kr << 1 campol arata ca cel al unui dipol pur, insala valori mari ale lui r va fi deformat datorita curgerii fluidului in directia axei Ox. ($\vec{u} = u\hat{x}$). Problema are aplicatii in teoria vantului solar.



Liniile campului magnetic in corona solara

Ecuatia de continuitate

Deoarece masa un se creeaza dar nici un se distruge, orice variatie de densitate se poate pune pe reama redistribuirii masice. Fie un element de volum (care un se misca odata cu fluidul) marginit de suprafata inchisa S, avand versorul normalei **n**



Rata scaderii mases in volumul V va trebui sa fie egala cu rata curgerii masice spre exteriorul volumului V:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, dV = \int_S \rho\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\, dS.$$

⇓ (teorema divergentei)

$$\int_V (\nabla\cdot\rho\mathbf{u})\, dV$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, dV = \int_V (\nabla\cdot\rho\mathbf{u})\, dV.$$

In conditiile in care volumul este fixat, obtinem:

$$\int_V \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\rho\mathbf{u}\right) dV = 0. \qquad (1.17)$$

si deoarece este ales arbitrar, (1.17) este valabila doar cand:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0. \tag{1.18}$$

sau

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{u}) = 0 \\ \dfrac{d}{dt} = \dfrac{\delta}{\delta t} + \vec{u}\nabla \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \vec{u} = 0}$$

Ecuatiile (1.13), (1.16) si (1.18) formeaza setul de baza in studiul miscarii fluidelor electroconductoare in campuri magnetice. Sunt 7 ecuatii scalare cu 8 necunoscute :**B, u** (cu cate trei componente), p si ρ. Evident ca este necesara introducerea unei ecuatii suplimentare pentru a inchide sistemul. Avem doua posibilitati simple:

1. Curgere incompresibila $\Longrightarrow \rho = const$. Ceeea ce inseamna ca (1.18) devine:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \tag{1.19}$$

2. Curgere compresibila$\Longrightarrow$ *p=p(ρ,T) = ecuatia de stare* care in general induce prezenta unei variabile suplimentare T, deci necesitatea unei noi ecuatii. Pentru simplitate si in buna aproximatie vom utiliza:

$$p = const.\rho \quad \text{legea gazelor izoterme} \tag{1.20}$$

$$p = const.\rho^{\gamma} \quad \text{legea gazelor adiabatice} \tag{1.21}$$

unde γ este raportul caldurilor specifice.

Ecuatia conservarii energiei

In multe aplicatii din astrofisica, este important ca in local ecuatiei de stare sa fie utilizata ecuatia conservarii energiei:

$$\boxed{\frac{\rho^{\gamma}}{\gamma - 1}\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\rho^{\gamma}}\right) = -L} \tag{1.22}$$

unde *L* reprezinta functia pierderii de energie.

Daca ***L = 0*** ecuatia (1.22) este cunoscuta ca *ecuatia adiabatica,* iar (1.22) devine:

$$\frac{dp}{dt} - \frac{\gamma p}{\rho_0}\frac{d\rho}{dt} = 0 \tag{1.23}$$

Daca ***L ≠ 0*** va trebui sa punem in evidente efectele neadiabaticitatii.

$$\boxed{L = \nabla \cdot \vec{q} + L_r - \frac{j^2}{\sigma} - H} \tag{1.24}$$

unde:

q este *fluxul de caldura* datorat conductiei termice $\boxed{\vec{q} = -k\nabla T}$,

k fiind conductivitatea termica

L_r este *fucntia de radiatie* $\boxed{L_r = -k_r \nabla^2 T}$

k_r fiind coeficientul conductivitatii radiative

$\frac{j^2}{o}$ este termenul disiparii Ohmice

H reprezentand suma termenilor specifici altor surse de caldera

In plasme magnetizate rarefiate: $\boxed{q = -\hat{k}\nabla T}$ unde $\hat{k}$ este termenul conductiei termice si in acest caz:

$$\nabla \vec{q} = \nabla_{\|} \cdot \left(k_{\|} \nabla_{\|} T\right) + \nabla_{\perp} \cdot \left(k_{\perp} \nabla_{\perp} T\right)$$

unde conductia termica in lungul liniilor campului magnetic $k_{\|}$ este asigurata de electrón

$$k_{\|} = 10^{-11} T^{5/2} W m^{-1} K^{-1}$$

iar conductia termica pe directie perpendiculara pe campul magnetic $k_{\perp}$ de catre protoni

si $\frac{k_{\|}}{k_{\perp}} 2 \times 10^{-31} \frac{n^2}{T^3 B^2}$ (B fiind dat in Tesla).

In cazul plasmelor puternic magnetizate, conductivitatea peste campul magnetic este puternic diminuata.

In cazul in care presiunea plasmei este constanta (procese izobare) ecuatia (1.22) devine:

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = -L, \quad c_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{k_B}{m}$$

1.2 Teorema conservării fluxului

Teoremă: **Fluxul liniilor campului magnetic printr-un element de suprafata strabatut de un fluid este constant si un depende de curgerea fluidului≡ fluxul campului magnetic printr-o suprafata ce se sprijina pe un contar inchis ∂S dintr-un fluid se conserva.**

Demonstrația este o consecință imediată a teoremei de inghețare . Deoarece liniile câmpului sunt înghețate în fluid, rezultă că toate liniile ce se vor găsi în interiorul (sau exteriorul) unui circuit străbatut de un fluid la un moment t_0 vor fi regăsite la un moment ulterior $t \neq t_0$. Altfel spus, fluxul

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \tag{1.2.1}$$

ce traversează suprafața S, delimitată de circuitul ∂S (vezi figura 1.3.1)

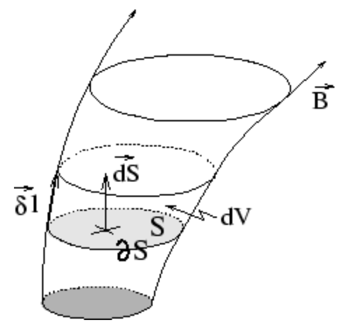


Figura 1.2.1 Tubul de flux magnetic. Tubul este în întregime definit prin alegerea unui circuit ∂S. Local putem defini un element de volum al tubului *dV* prin elementul de suprafață *dS* şi o mică deplasare $\delta \vec{l}$ în lungul liniilor de câmp. Masa fluidului conținută în elementul de volum nu se va schimba în timp chiar dacă forma tubului va suferi modificări considerabile.

străbătut de un fluid, este constant în timp. Ținînd cont că: $\vec{B} \propto \rho\, \delta \vec{l}$ (vezi demonstrația de la teorema înghețării) rezultă că:

$$\frac{d\Phi}{d\,t} = \frac{d}{d\,t}\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \propto \frac{d}{d\,t}\int_S \rho\, \vec{l} \cdot d\vec{S} = \frac{d}{d\,t}\left(masa\ de\ fluid\ din\ elementul\ de\ volum\ dV\right) = 0 \tag{1.2.2}$$

deoarece elementul de volum *dV* este el însuşi străbătut de fluid , conținutul masic nu variază în timp

$$\frac{d\Phi}{dt}=\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=\int_S \frac{d\vec{B}}{dt}\cdot d\vec{S}+\int_S \vec{B}\cdot\frac{d\vec{S}}{dt}$$

$$insa\quad \begin{array}{l} \dfrac{d\vec{B}}{dt}=\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{B} \\ \dfrac{d\vec{S}}{dt}=-(d\vec{S}\times\nabla)\times\vec{u} \end{array}$$

insa:

$$\left\{\left[d\vec{S}\times\nabla\right]\times\vec{u}\right\}_i=\varepsilon_{ijk}\left(d\vec{S}\times\nabla\right)_j u_k=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jlm}\left(\Delta S_l\partial_m\right)u_k=$$
$$=\varepsilon_{kij}\varepsilon_{jlm}\left(\Delta S_l\partial_m\right)u_k=\left(\delta_{kl}\delta_{im}-\delta_{km}\delta_{il}\right)\left(\Delta S_l\partial_m\right)u_k=$$
$$=\Delta S_k\partial_i u_k-\Delta S_i\partial_k u_k$$
$$\Downarrow$$
$$\left(d\vec{S}\times\nabla\right)\times\vec{u}=d\vec{S}\cdot\left(\nabla\vec{u}\right)-d\vec{S}\left(\nabla\cdot\vec{u}\right)$$

astfel:

$$\frac{d}{dt}\int\vec{B}d\vec{S}=\int\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\vec{u}\cdot\nabla\vec{B}\right)d\vec{S}+\int\vec{B}\left[d\vec{S}\left(\nabla\cdot\vec{u}\right)-\left(\nabla\vec{u}\right)\cdot d\vec{S}\right]=$$
$$=\int\left[\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\underbrace{\vec{u}\cdot\nabla\vec{B}+\vec{B}\left(\nabla\cdot\vec{u}\right)-\vec{B}\cdot\left(\nabla\vec{u}\right)}_{-\nabla\times\left(\vec{u}\times\vec{B}\right)}\right]d\vec{S}$$
$$=\int\left[\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}--\nabla\times\left(\vec{u}\times\vec{B}\right)\right]d\vec{S}=0$$

Observam ca demonstratia este valabila in conditiile in care $\nabla\cdot\vec{B}=0$ si $\eta=0$ ceea ce este echivalent cu o comportare perfect conductoare a fluidului plasmatic.

1.3 Teorema înghețării

Pentru numere Reynolds mari R_m >>1 ecuatia (1.16) devine:

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\nabla\times(\vec{u}\times\vec{B})$$

si pentru fluidele perfect electroconductoare, campul magnetic se comporta ca si cum s-ar deplasa impreuna cu plasma (campul magnetic pare a fi *inghetat* in plasma)

Teoremă: **Într-un fluid perfect electroconductor ($\sigma=\infty$) in miscare, liniile de forta ale campului magnetic se misca impreuna cu fluidul**

Pentru a demonstra teorema să rescriem ecuația liniilor cîmpului magnetic (1.16) sub forma:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times \left(\vec{u} \times \vec{B}\right) = \left(\vec{B} \cdot \nabla\right)\vec{u} - \left(\vec{u} \cdot \nabla\right)\vec{B} - \vec{B}\nabla \cdot \vec{u} \qquad (1.3.1)$$

unde am ținut cont că $\nabla \cdot \vec{B} = 0$.

Această ecuație demonstrează că urmărind mişcarea, câmpul magetic variază pe de o parte sub efectul compresibilității fluidului (termenul $\vec{B}\nabla \cdot \vec{u}$) şi pe de altă parte sub

efectul inegalității vitezei în lungul câmpului (termenul $\left(\vec{B} \cdot \nabla\right)\vec{u}$). Aceste doua efecte sunt ilustrate în figurile 5.1 a şi b:

Termenul $\nabla \cdot \vec{u}$ poate fi obținut din ecuația de continuitate, deci:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \rho = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{u} = 0 \Rightarrow \rho \nabla \cdot \vec{u} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} - \vec{u} \cdot \nabla \rho \qquad (1.3.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\vec{u}}{\rho} \cdot \nabla \rho$$

Înlocuim această expresie în (1.2.1) şi după multiplicarea cu $\frac{1}{\rho}$ rezultă imediat ecuația ce descrie evoluția lui $\frac{\vec{B}}{\rho}$ datorată câmpului vitezelor $\vec{u}$.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla\right)\frac{\vec{B}}{\rho} = \left(\frac{\vec{B}}{\rho} \cdot \nabla\right)\vec{u}. \qquad (1.3.3)$$

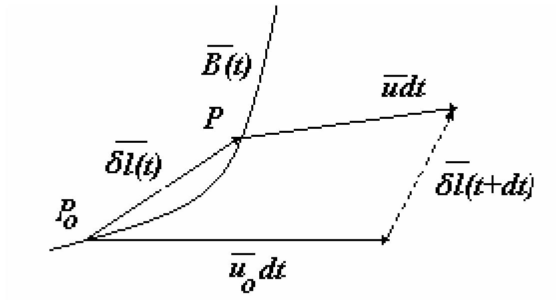


Figura 1.2.1: Evoluția temporală a unei distanțe vectoriale între două elemente de fluid vecine, sub acțiunea câmpului de viteze $\vec{u}$.

Să considerăm acum evoluția vectorului $\vec{\delta l}$ care leagă două elemente de fluid infinit vecine în P_0 şi P , care se deplasează cu vitezele $\vec{u}_0$ şi respectiv $\vec{u}$. Fie doua puncte situate pe aceeaşi linie de câmp la un moment t (vezi figura 1.2.1). Variația vectorului $\vec{\delta l}$ va fi:

$$\delta \vec{l}\left(t + dt\right) - \delta \vec{l}\left(t\right) = \left(\vec{u} - \vec{u}_0\right)dt \tag{1.3.4}$$

Dacă câmpul de viteze nu implică singularități putem face o dezvoltare în serie Taylor, limitată la termenii de ordinul întâi, în jurul lui P_0 :

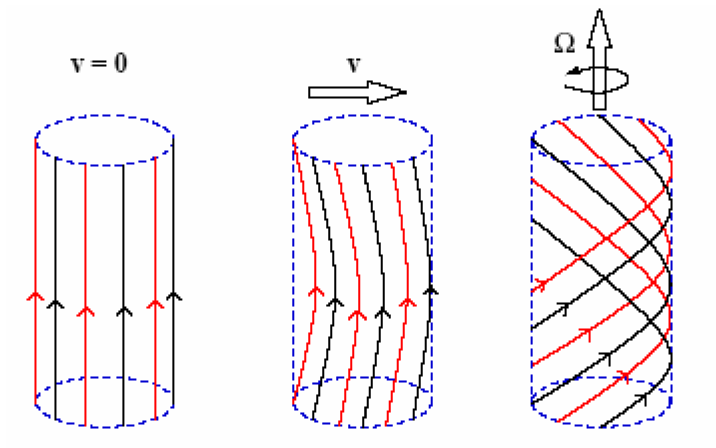
$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \left(\delta \vec{l} \cdot \nabla\right)\vec{u} \tag{1.3.5}$$

Înlocuind această expresie în cea a variației vectorului $\vec{\delta l}$ se va obține o ecuație diferențială ce descrie evoluția vectorului $\vec{\delta l}$

$$\frac{d\,\delta \vec{l}}{d\,t} = \left(\delta \vec{l} \cdot \nabla\right)\vec{u} \tag{1.3.6}$$

Ultima derivată temporală din (1.2.6) este o derivată ce *urmăreşte mişcarea* ceea ce demonstrează că ecuațiile care descriu evoluțiile lui $\vec{\delta l}$ (ec.1.2.6) şi $\vec{B}/\rho$ (ec. 1.2.3) sunt identice. **QED**

Consecinta fireasca a teoremei de inghetare este ca plasma se poate misca liber in lungul liniilor de camp in timp ce in cazul miscarii pe directie perpendiculara, plasma va "trage" liniile campului magnetic



Ilustrarea inghetarii fluxului liniilor campului magnetic

Ecuatiile de baza in MHD:

Ecuatia de continuitate:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0} \qquad \textbf{(I)}$$

Ecuatia momentului:

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}\right) = -\rho \vec{g} + \rho \nu\left(\nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{3}\nabla(\nabla \cdot \vec{u})\right) + (\vec{B} \cdot \nabla)\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \nabla\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right)} \qquad \textbf{(II)}$$

Ecuatia liniilor campului magnetic:

$$\boxed{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{B}} \qquad \textbf{(III)}$$

Ecuatia conservarii energiei:

$$\boxed{\frac{\rho^\gamma}{\gamma - 1}\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) = -L} \qquad \textbf{(IV)}$$

Ecuatia fluxului liniilor campului magnetic:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0} \qquad \textbf{(V)}$$

Pentru numere Reynolds mari **(teorema inghetarii liniilor campului magnetic):**

$$\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla\right)\frac{\vec{B}}{\rho} = \left(\frac{\vec{B}}{\rho} \cdot \nabla\right)\vec{u}.} \qquad \textbf{(VI)}$$